КОРПОРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 338

О. И. Никонов, М. А. Медведев

МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В РАБОТЕ С КОНТРАГЕНТАМИ ПРЕДПРИЯТИЙ[1]

В работе рассматриваются задачи векторной оптимизации, связанные с выбором эффективных портфелей контрагентов предприятия. В первом разделе работы в качестве критериев оптимизации выбраны подлежащие минимизации расходы на поставку товаров и риск несвоевременной поставки. Второй раздел посвящен оптимизации работы с клиентами банка путем формирования эффективного портфеля банковских продуктов. Методологически развиваемый подход примыкает к теории портфельных инвестиций, восходящей к работе Г. Марковица [6], однако применяемый для объектов, отличных от инструментов фондового рынка.

Ключевые слова: векторная оптимизация, эффективные портфели поставщиков предприятия, теория портфельных инвестиций, эффективные портфели банковских продуктов

1. Выбор оптимального портфеля поставщиков предприятия

В настоящей статье теория портфельных инвестиций, восходящая к работе Г. Марковица [6] и развитая первоначально для рисковых финансовых инструментов рынка ценных бумаг, модифицируется и применяется к построению эффективных портфелей из объектов иной природы.

Со времени появления указанной работы Г. Марковица развитие теории портфельных инвестиций шло в нескольких направлениях. Первое направление связано с именем Дж. Тобина и развитием модели ценообразования на рынке капитала (*Capital Asset Pricing Model*). Другое направление — динамические постановки задачи. Здесь отметим работы Р. Мертона и Дж. Моссина, относящиеся соответственно к моделированию непрерывных и многошаговых стохастических процессов. Авторы настоящей статьи обращаются к направлению, применяющему портфельную теорию к объектам, отличным по своей природе от ценных бумаг. Здесь нельзя не упомянуть работы, относящиеся к аренде нефтяных производств и формированию энергетической стратегии Европейского союза [4, 5].

В работах [1–3] рассматриваются некоторые приложения теории портфельных инвестиций. Авторы рассматривают несколько ситуаций, где такое применение оправдано и представляется перспективным. Отмечается, что работа с контрагентами сопряжена с разного рода рисками, в том числе с рисками невыполнения контрагентами своих обязательств. В статьях обсуждаются экономико-математические модели диверсификации рисков предприятия, основанные на подходах теории портфельных инвестиций.

Перейдем к постановке задачи. Рассмотрим предприятие, которое занимается посреднической деятельностью. Предприятие не имеет собственных складов. Для простоты будем рассматривать только один вид продукции. Предприятие работает с L поставщиками, которые поставляют указанную продукцию. Цена единицы продукции у поставщика j предполагается равной μ_j.

Главным фактором при выборе поставщика является готовность к поставке, так как из-за отсутствия собственных складских помещений важно, чтобы продукция поставлялось в указанный срок. Вторым по значимости является фак-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 09-01-00223-а и № 11-06-00153-а.

тор цены. Будем считать, что качество продукции у всех поставщиков одинаково.

Считаем, что предприятию необходимо в единицу времени иметь k единиц сырья.

Если все поставщики вовремя и в нужном объеме осуществляют запланированные поставки, то рациональный выбор поставщиков состоит в том, чтобы обеспечить необходимое количество при минимальных затратах. В этом случае затраченная на поставки сумма будет иметь вид

$$S(X)=\sum_{j=1}^{L}\mu_j x_j,$$

где $X = (x_1, \ldots, x_L)$ — вектор, элементами которого являются объемы поставок сырья от поставщиков с соответствующими номерами.

Задача состоит в минимизации величины $S(X)$:

$$S(X) \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$0 \le x_j, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{L} x_j = k. \tag{3}$$

Соотношения (1)–(3) представляют собой стандартную задачу линейного программирования, методы решения которой хорошо известны.

Модифицируем модель таким образом, чтобы учесть риски нарушения поставщиком своих обязательств. Предполагается, что риски носят случайный характер и характеризуются случайной величиной ущерба, который наносится фирме несвоевременной поставкой продукции. При этом полагаем, что величина ущерба пропорциональна заказанному количеству товара.

Исходя из условия, что предприятию-поставщику j заказано x_j единиц товара, будем предполагать, что к затратам $\mu_j x_j$ на оплату заказанного товара добавляется сумма $\lambda_j x_j$, где λ_j — случайная величина, характеризующая возможность (вероятность) невыполнения поставщиком своих обязательств. Если λ_j принимает значение, равное нулю, — поставки осуществляются своевременно; при других (положительных) значениях λ_j имеем дополнительные затраты, связанные с невыполнением контрагентом своих обязательств.

Таким образом, модифицированная функция затрат становится случайной величиной

$$\Psi(X,\Lambda)=S(X)+\sum_j \lambda_j x_j. \tag{4}$$

Символом Λ в данном соотношении обозначен вектор, аналогичный вектору X, состоящий из элементов λ_j.

Ожидаемая величина затрат определяется соотношением

$$E[\Psi(X,\Lambda)]=S(X)+\sum_j \overline{\lambda}_j x_j,$$

где $\overline{\lambda}_j$ — ожидаемое значение случайной величины λ_j.

В качестве меры риска выберем среднеквадратичное отклонение случайной величины затрат от своего среднего значения:

$$\sigma(X,\Lambda)=\sqrt{D(\Psi(X,\Lambda))},$$

где символом $D(\Psi(X, \Lambda))$ обозначена дисперсия случайной величины $\Psi(X, \Lambda)$. Используя представление (4), для среднеквадратичного отклонения получим следующее выражение:

$$\sigma^2(X,\Lambda)=E\left[\left(\sum_j x_j(\lambda_j-\overline{\lambda}_j)\right)^2\right]=$$

$$=\sum_{j,m} x_j x_m E[(\lambda_j-\overline{\lambda}_j)(\lambda_m-\overline{\lambda}_m)]. \tag{5}$$

В последнем выражении суммирование осуществляется по всем возможным значениям индексов j, $m = 1, \ldots, L$.

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи. Требуется минимизировать две величины:

$$\Phi(X)=S(X)+\sum_j \overline{\lambda}_j x_j \to \min_X \tag{6}$$

и

$$\sigma^2(X, \Lambda) \to \min_X \tag{7}$$

при линейных ограничениях

$$0 \le x_j, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{L} x_j = k. \tag{9}$$

Если мы зафиксируем ожидаемые затраты в задаче (6)–(9) на определенном уровне, то получим аналог классической задачи теории портфельных инвестиций, в которой линейная форма (6) минимизируется, а не максимизируется как в классическом случае. Будем трактовать задачу (6)–(9) как двухкритериальную векторную задачу математического программирования, используя для ее решения метод скаляризации векторного критерия.

Точки, оптимальные по Парето, будут соответствовать решениями следующей задачи

$$\alpha\Phi(X)+(1-\alpha)\sigma^2(X,\Lambda)\to\min_X, \qquad (10)$$

$$0\le x_j, \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{L} x_j = k. \qquad (12)$$

Для каждого $\alpha\in[0,1]$ находим оптимальный вектор X задачи (10)–(12). Свойства функций $\Phi(X)$и $\sigma^2(X,\Lambda)$ позволяют заключить, что перебирая все $\alpha\in[0,1]$, мы получим все множество неулучшаемых (оптимальных по Парето) решений.

Апробируем изложенную выше модель на данных конкретного предприятия, которое работает с 6 поставщиками. Исходные данные представляют собой объемы поставок каждого поставщика, плановую и реальную даты поставок и количество дней просрочки по поставке за период с января 2010 г. по апрель 2011 г.

Количество дней просрочки каждого поставщика находится как разность между датой реальной поставки и плановой.

Кроме этого известны средние цены на единицу продукции по каждому поставщику за анализируемый период (табл. 1).

Таблица 1

Цена на продукцию

Показатель	**Поставщик** (порядковый номер)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Цена единицы продукции руб.	23,75	23,9	23,6	23,7	23,8	23,825

Для определения λ_j — случайной величины, характеризующей возможность (вероятность) невыполнения поставщиком своих обязательств, будем предполагать, что за день просрочки предприятие теряет 0,5% от стоимости поставки. Эти потери связаны с невыполнениями предприятием-посредником обязательств перед покупателями, а также с задержкой оборотных средств, которые можно использовать в других сделках или разместить иным образом.

Для удобства расчетов разобьем наши данные на месяцы, получим 16 периодов (месяцев). Для нахождения векторов λ_j, векторов дополнительных затрат, элементами которых являются дополнительные затраты j-го поставщика в i-й месяц, где $j=1,\dots,6$, $i=1,\dots,16$, рассмотрим $\lambda_{j,i,m}$, дополнительные затраты для каждой сделки, где m — номер сделки в i-ом месяце.

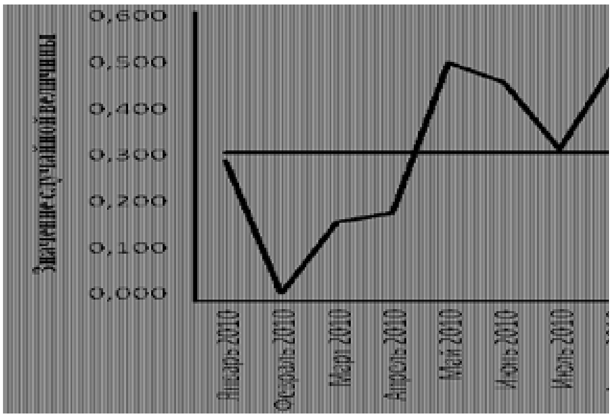

Рис. 1. *Отклонения значений случайной величины от ожидаемого значения поставщика №1*

$\lambda_{j,i,m}$ рассчитывается как количество дней просрочки, умноженное на 0,5% от стоимости товара у поставщика. Дополнительные затраты по сделке высчитываются путем умножения $\lambda_{j,i,m}$ на объем поставки m-ой сделки. Значение $\lambda_{j,i}$ получаем делением суммы дополнительных затрат за весь месяц на полный объем месячных поставок.

В качестве примера в таблице 2 представлен расчет значения $\lambda_{j,i}$ для первого поставщика за первый месяц.

На рис. 1 представлены отклонения значений случайной величины от ожидаемого значения у поставщика №1. Ожидаемому значению здесь соответствует прямая линия.

Проанализировав динамику объемов закупок, мы получим вектор X, описывающий текущее распределение поставок между поставщиками. Элементами X являются объемы поставок товара от поставщиков в нормализованном виде, т. е. весь объем поставок от всех поставщиков принимается за единицу. Получаем вектор $X=(0{,}01;\ 0{,}18;\ 0{,}06;\ 0{,}46;\ 0{,}04;\ 0{,}25)$.

Для нахождения риска рассчитаем ковариационную матрицу. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Используя формулы (4) и (5), находим ожидаемые затраты и риск существующего пула поставщиков. Ожидаемые затраты равны 24,04 руб. за единицу товара. Риск существующего пула равен 0,064113.

Для нахождения точек, оптимальных по Парето, была решена задача (10)–(12). Для каждого коэффициента α от 0 до 1 с шагом 0,01 была решена задача минимизации. Расчеты были проведены с учетом неотрицательности элементов вектора X.

Таблица 2

Расчет значения $\lambda_{j,i}$ для первого поставщика за январь 2010 г.

Номер сделки, k	Дата поставки	Плановая дата поставки	Объем поставки, ед.	Количество дней просрочки	$\lambda_{j,i,m}$	Дополнительные затраты по сделке	$\lambda_{1,1}$
1	12.01.2010	06.01.2010	5 616	6	0,71	4 001	
2	11.01.2010	08.01.2010	5 616	3	0,36	2 001	
3	09.01.2010	09.01.2010	2 808	0	0,00	0	
4	13.01.2010	13.01.2010	5 616	0	0,00	0	
5	22.01.2010	22.01.2010	5 616	0	0,00	0	
6	30.01.2010	26.01.2010	5 616	4	0,48	2 668	
7	31.01.2010	29.01.2010	5 616	2	0,24	1 334	
		Сумма	36 504			10 004	0,27

Таблица 3

Ковариационная матрица

	Поставщик №1	Поставщик №2	Поставщик №3	Поставщик №4	Поставщик №5	Поставщик №6
Поставщик №1	0,0238	0,0043	0,0062	–0,0056	0,0048	–0,0033
Поставщик №2	0,0043	0,0168	–0,0018	–0,0011	0,0069	0,0028
Поставщик №3	0,0062	–0,0018	0,0251	0,0042	–0,0067	–0,0036
Поставщик №4	–0,0056	–0,0011	0,0042	0,0071	–0,0013	0,0030
Поставщик №5	0,0048	0,0069	–0,0067	–0,0013	0,0223	0,0039
Поставщик №6	–0,0033	0,0028	–0,0036	0,0030	0,0039	0,0162

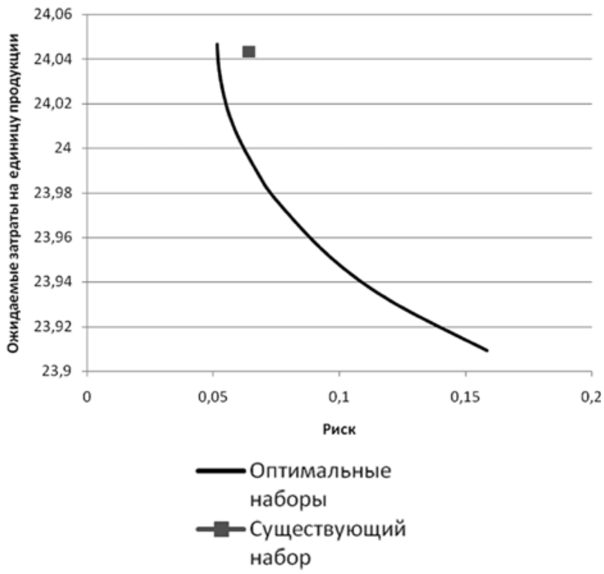

Рис. 2. *Зависимость ожидаемых затрат от риска*

Рис. 3. *Текущий портфель*

Рис. 4. *Оптимальный портфель*

Результаты расчетов в графическом виде отражены на рис. 2.

Из графика видно, что существующая ситуация не является оптимальной. Изменив доли поставщиков в существующем пуле, мы можем уменьшить риск или существенно уменьшить ожидаемые затраты.

Минимальный риск равен 0,0514, что значительно меньше риска текущего пула. Оптимальный вектор долей объема поставщиков имеет вид: $X = (0{,}22;\ 0{,}10;\ 0{,}00;\ 0{,}54;\ 0{,}06;\ 0{,}08)$. Точка, в которой затраты равны 24,04, а риск равен 0,0514, является точкой, оптимальной по Парето.

На рисунках 3–4 представлено сравнение текущего набора и оптимального.

Таким образом, использование предлагаемой методики позволит увеличить эффективность работы с поставщиками, ускорить процесс выбора поставщика в спорной ситуации.

2. Управление ликвидностью в коммерческом банке

Задача управления ликвидностью представляет собой задачу выбора оптимального портфеля активных и пассивных банковских операций, который бы обеспечивал максимальный уровень доходности при определенном уровне риска. Поскольку речь идет об активных и пассивных операциях, то под доходностью в данном случае понимается банковская маржа, равная разнице между процентными ставками по активным и пассивным операциям. Сведем данную задачу к построению двух эффективных портфелей: активных и пассивных операций. В качестве рисковых активов рассматриваются следующие ресурсы банка:

— размещенные межбанковские кредиты;

— ценные бумаги (облигации, акции, векселя);

— кредиты юридическим лицам;

— кредиты малому и среднему бизнесу;

— факторинг;

— кредиты физическим лицам.

На рис. 5 приведен пример динамики доходности от операции факторинг за период с января 2007 г. по январь 2009 г. Чтобы определить ожидаемое значение доходности от всех активных банковских операций, необходимо определить доли y_{1i} всех активов, сосредоточенных в данных операциях. Ожидаемое значение доходности r_1 от всех активных операций при фиксированных долях y_{1i}, рассчитывается стандартным образом:

$$M_1(r_1) = \sum_{i=1}^{N} M_1(r_{1i}) y_{1i},$$

Рис. 5. *Динамика доходности по операциям факторинга*

где $r_1 = \sum_{i=1}^{N} r_{1i} y_{1i}$.

Для вычисления совокупного статистического риска $\sigma_1(r_1)$ следует составить матрицу ковариаций $V_1 = \{\sigma_{ij}\}$, где $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(r_{1i}, r_{1j})$ — коэффициенты ковариаций, рассчитываемые по исходным выборкам заданных доходностей. Для величины $\sigma_1(r_1)$ имеем следующее представление:

$$\sigma_1(r_1) = (\sum_{i,j=1}^{N} y_{1i} \sigma_{ij} y_{1j})^{1/2}.$$

Задача предполагает поиск вариантов выборов долей, обеспечивающих максимально возможный уровень ожидаемой доходности при минимально возможном риске. На доли накладывается условие:

$$\sum_{i=1}^{N} y_{1i} = 1,\ y_{1i} \geq 0.$$

Таким образом, постановка задачи выглядит следующим образом:

$$M_1(r_1) = \sum_{i=1}^{N} M_1(r_{1i}) y_{1i} \to \max,$$

$$\sigma_1(r_1) = (\sum_{i,j=1}^{N} y_{1i} \sigma_{ij} y_{1j})^{1/2} = \sigma_1^*,$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_{1i} = 1,$$

$$y_{1i} \geq 0.$$

Символом σ_1^* обозначен фиксированный уровень статистического риска активных операций.

Для решения задачи по данным реального банка г. Екатеринбурга были использованы данные по доходности за 36 месяцев (2007–2009 гг.)

Подсчитанный должным образом вектор долей существующего портфеля выглядит следующим образом: X^T = (0,05; 0,235; 0,45; 0,1; 0,015; 0,15), т. е. 5% имеющихся денежных средств размещаются в межбанковские кредиты, 23,5% — в ценные бумаги, 45% — в кредиты юридическим лицам, 10% — в кредиты малому и среднему бизнесу, 1,5% — в факторинг, 15% — в кредиты физическим лицам.

При данном векторе долей доходность портфеля составила 15,885%, риск — 2,878. График кривой эф-

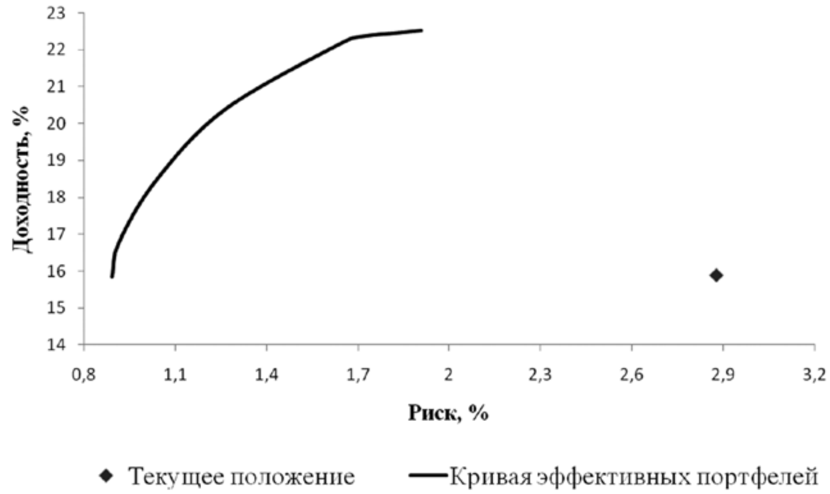

Рис. 6. *Кривая эффективных портфелей и точка, соответствующая реальному положению*

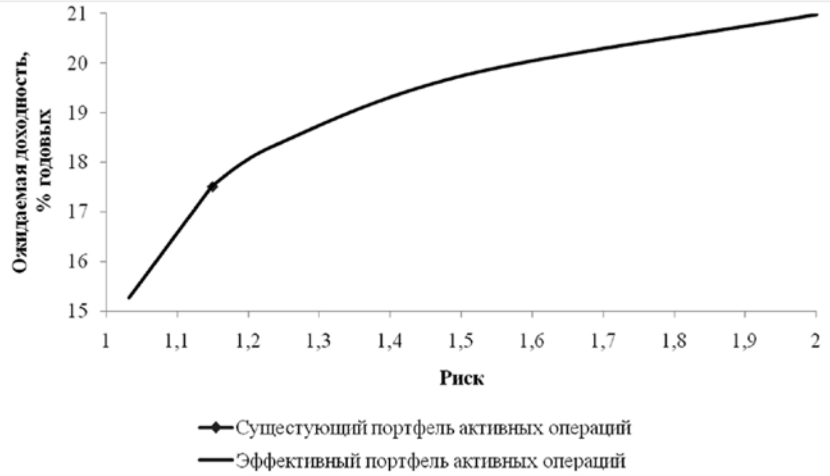

Рис. 7. *Существующий портфель активных операций и кривая эффективных портфелей с учетом ограничений на доли вложений в ценные бумаги*

фективных портфелей и точка, соответствующая реальному положению, представлены на рис. 6.

Как видно на рис. 6, портфель банковских операций весьма далек от оптимальности в смысле теории Г. Марковица. Этому есть объяснение: теория не учитывает ограничения на допустимые доли расходов на ту или иную операцию, связанные со стратегическими планами банка, с завоеванием им своей доли рынка.

В реальной ситуации значительная часть средств на корреспондентском счете данного банка ежедневно расходуется на вложения в ценные бумаги, т. к. они обладают высокой доходностью. Таким образом, в модели необходимо ввести дополнительное ограничение на долю операций с ценными бумагами в портфеле активных операций. Введем ограничение: $0{,}23 \leq y_{12} \leq 1$ (т. е. доля вложений в ценные бумаги должна превышать 23% от всех вложений). Так как приоритетным направлением для банка является кредитование физических и юридических лиц, ограничим вложения в межбанковские кредиты следующим образом: $0 \leq y_{11} \leq 0{,}15$, а кредитование юридических и физических лиц соответственно: $0{,}3 \leq y_{13} \leq 1$, $0{,}15 \leq y_{16} \leq 1$.

Кроме того, модель построена на данных за период с января 2007 г. по январь 2009 г. и включает кризисный 2008 г., характеризующийся падением доходности по многим активным операциям. Исключив влияние кризисного 2008 г. и построение аналогичной модели на данных за 2009 г. (12 месяцев), получим результаты, отраженные на рис. 7. Как видно из названного рисунка, существующий портфель практически принадлежит кривой эффективных портфелей. Таким образом, при наложении соответствующих ограничений и использовании данных за ближайший год можно получить достоверную картину текущей ситуации в банке и оценить эффективность вложений.

Портфели пассивных операций исследуются аналогично. В результате проделанных вычислений были получены эффективные портфели пассивных и активных банковских операций при фиксированном уровне риска, равном 0,509. Доходность портфеля активных операций составляет 18,052% годовых, процентный расход портфеля пассивных операций равен 11,54% годовых. Таким образом, банковская процентная маржа вычисляется следующим образом: 18,052 – 11,54 = 6,512% годовых. Банковская маржа существующего портфеля составляет:17,506 – 12,064 = 5,442% годовых.

Таким образом, предлагаемая методика позволяет увеличить банковскую маржу на 1,07% (рост составляет 20%), что весьма существенно в банковской деятельности.

Рассматриваемый инструмент позволяет учитывать стратегические интересы банка, проигрывать различные варианты, обосновывать или опровергать гипотезы о рациональном распределении ресурсов между различными банковскими операциями. Предлагаемая методика может быть эффективным инструментом развития банковского бизнеса.

Список источников

1. *Никонов О. И., Медведев М. А.* О некоторых приложениях теории портфельных инвестиций // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании : сб. материалов 3-й Междунар. науч. конф. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2008.

2. *Никонов О. И., Медведев М. А.* Статические задачи теории портфельных инвестиций // Вестник УГТУ-УПИ. — 2008. — № 3(92). — С. 72-79. (Экономика и управление).

3. *Никонов О. И., Медведева М. А., Египцев Д. С.* Повышение эффективности системы сбыта продукции. Математическое моделирование // Вестник УГТУ-УПИ. — 2004. — № 4. — Вып. 4. — С. 96-103. (Экономика и управление).

4. *Awerbuch S.* Portfolio-based Electricity Generation Planning. Policy Implications for Renewables and Energy Security // Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change. — 2006. — No 11(3). — P. 693-710.

5. *Helfat C.* Investment choices in industry. — Cambrige : MT, 1988.

6. *Markowitz, H.* Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — Vol. 7. — P. 77-91.

Информация об авторах

Никонов Олег Игоревич (Екатеринбург) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой анализа систем и принятия решений, декан факультета информационно-математических технологий и экономического моделирования ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина» (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: aspr@mail.ustu.ru).

Медведев Максим Александрович (Екатеринбург) — соискатель кафедры анализа систем и принятия решений ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина» (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: aspr@mail.ustu.ru).

O. I. Nikonov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education
«Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin»
M. A. Medvedev
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education
«Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin»

Vector optimization technique in the problems of interaction between an enterprise and its counteragents

In the paper we consider the vector optimization problems connected with those of the choice of effective portfolios of the counteragents of an enterprise. In the first section the supply cost and risk of delay, both are to be minimized, are taken as criteria functions. The second section is devoted to optimization of the work of a bank with its customers by construction of an efficient portfolio of the bank instruments. The developing approach is methodologically related to that, which goes back to the paper by H. Markowitz, but considered for the objects different from those of financial market.

Keywords: vector optimization, effective portfolios of suppliers of an enterprise, portfolio investment theory, effective portfolios of bank instruments

References

1. Nikonov O. I., Medvedev M. A. (2008). O nekotorykh prilozheniyakh teorii portfel'nykh investitsiy [On some applications of the portfolio investments theory]. Informational and mathematical technologies in economics, technology and education: a collection of materials of the 3rd international conference. Ekaterinburg: Ural State Technical University.

2. Nikonov O. I., Medvedev M. A. (2008). Staticheskie zadachi teorii portfel'nykh investitsiy [Static goals of the portfolio investments theory]. Ekaterinburg: Bulletin of the Ural State Technical University (Economics and Management), 3(92), 72-79.

3. Nikonov O. I., Medvedeva M. A., Egiptsev D. S. (2004). Povyshenie effektivnosti sistemy sbyta produktsii. Matematicheskoe modelirovanie [Improving the effectiveness of production distribution. Mathematic modeling]. Ekaterinburg: Bulletin of the Ural State Technical University (Economics and Management), 4, 96-103.

4. Awerbuch S. (2006). Portfolio-based Electricity Generation Planning. Policy Implications for Renewables and Energy Security. Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change, 11(3), 693-710.

5. Helfat C. (1988). Investment choices in industry.Cambrige: MT.

6. Markowitz H. (1952). Portfolio selection. J. Finance, 7, 77-91.

Information about the authors

Nikonov Oleg Igorevich (Ekaterinburg) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of analysis of systems and decision-making, Dean of the Faculty of informational and mathematical technologies and economic modeling at the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin» (620002, Yekaterinburg, Mira St. 19, e-mail: aspr@mail.ustu.ru).

Medvedev Maksim Aleksandrovich (Ekaterinburg) — applicant of the Department of analysis of systems and decision-making at the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin» (620002, Yekaterinburg, Mira St. 19, e-mail: aspr@mail.ustu.ru).