УДК 519.863; 332.14:314.172

А. Ф. Шориков

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ СОСТОЯНИЕМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ РЕГИОНА ПРИ НАЛИЧИИ РИСКОВ[1]

Исследование и решение задачи управления состоянием экономической безопасности региона (СЭБР) требует разработки динамической экономико-математической модели, учитывающей наличие управляющих воздействий, неконтролируемых параметров (рисков, погрешностей моделирования и др.) и наличие дефицита информации. При этом существующие подходы к решению подобных задач базируются в основном на статических моделях и используют аппарат стохастического моделирования, для применения которого требуется знание вероятностных характеристик основных параметров модели и специальных условий реализации рассматриваемого процесса. Отметим, что для использования аппарата стохастического моделирования необходимы очень жесткие условия, которые на практике обычно заранее невыполнимы.

В данной статье предлагается использовать детерминированный подход для моделирования и решения исходной задачи в форме динамической задачи программного минимаксного управления (оптимизации гарантированного результата) СЭБР на заданный момент времени с учетом наличия рисков детерминированной и стохастической природы (комбинированная модель рисков).

При этом под рисками в социально-экономической системе будем понимать факторы, которые влияют негативно или катастрофически на результаты рассматриваемых в ней процессов.

Для возможности эффективного использования в работе предложена методика прогнозирования и оценки временных рядов стохастических рисков в процессе оптимизации СЭБР, которая может служить основой для разработки соответствующего компьютерного программного обеспечения.

Для решения задачи программного минимаксного управления СЭБР при наличии рисков предлагается метод, который сводится к реализации решений конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования, а также задачи дискретной оптимизации. Предлагаемый метод дает возможность разрабатывать эффективные численные процедуры, позволяющие реализовать компьютерное моделирование динамики рассматриваемой задачи, сформировать программное минимаксное управление и получить оптимальный гарантированный результат.

Представленные в статье результаты базируются на исследованиях [2, 3, 7, 8] и могут быть использованы для экономико-математического моделирования и решения других задач оптимизации процессов прогнозирования данных и управления в условиях дефицита информации и наличия рисков, а также для разработки соответствующих программно-технических комплексов для поддержки принятия эффективных управленческих решений на практике. Экономико-математические модели таких задач представлены, например, в работах [4–6].

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, дискретная динамическая система, детерминированные и стохастические риски, многокритериальная оптимизация, программное минимаксное управление, прогнозное множество

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00024-а).

1. Формирование экономико-математической модели динамики СЭБР

Процесс управления СЭБР на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ описывается векторным дискретным рекуррентным уравнением вида (динамическая модель):

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \\ + C(t)v(t) + D(t)w(t), x(0) = x_0, \qquad (1)$$

где $t \in \overline{0,\ T-1} = \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, $T > 0$; $x(t) \in \mathbf{R}^n$ — вектор фазовых переменных или фазовый вектор — набор основных параметров, описывающих СЭБР в момент времени t; $\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство векторов-столбцов, $n \in \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел;

$u(t) \in \mathbf{R}^p$ — вектор управляющего воздействия (управления), удовлетворяющий заданному ограничению:

$$u(t) \in U_1 \subset \mathbf{R}^p, \qquad (2)$$

где U_1 — конечное множество векторов, т. е. конечный набор векторов в $\mathbf{R}^p$, определяющих все возможные реализации различных сценариев управления в момент времени t; $p \in \mathbf{N}$;

$v(t) \in \mathbf{R}^q$ — вектор детерминированных рисков, влияющих на процесс реализации СЭБР, удовлетворяющий заданному ограничению:

$$v(t) \in V_1 \subset \mathbf{R}^q, \qquad (3)$$

где V_1 — выпуклый, замкнутый и ограниченный параллепипед пространства $\mathbf{R}^q$, т. е. множество, которое ограничивает уровень всех возможных значений реализаций детерминированных рисков в момент времени t; $q \in \mathbf{N}$;

$w(t) \in \mathbf{R}^m$ — вектор стохастических рисков, влияющих на процесс реализации СЭБР, удовлетворяющий для фиксированного вектора $\overline{w}(t) \in \mathbf{R}^m$ ограничению:

$$w(t) \in W_1(\overline{w}(t)) \subset \mathbf{R}^m, \qquad (4)$$

которое формируется на основании знания вероятностных характеристик для фиксированного вектора $\overline{w}(t) \in \mathbf{R}^m$, где $W_1(\overline{w}(t))$ — выпуклый, замкнутый и ограниченный параллепипед пространства $\mathbf{R}^m$, т. е. множество, которое ограничивает уровень всех возможных значений реализаций стохастических рисков в момент времени t; $m \in \mathbf{N}$;

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ — матрицы размерностей $(n\times n)$, $(n\times p)$, $(n\times q)$ и $(n\times m)$, соответственно, определяющие динамику СЭБР.

Опишем информационные возможности в рассматриваемом процессе.

Предполагается, что по ходу реализации рассматриваемого социально-экономического процесса для конкретного региона и фиксированного натурального числа $s >> T > 0$, в начальный момент времени $t = 0$ субъект управления имеет следующие информационные возможности, соответствующие реализациям фазового вектора, управляющего воздействия и векторов рисков на целочисленном промежутке времени $\overline{-s, 0}$, предшествующем рассматриваемому процессу управления СЭБР:

1) известна история реализации фазового вектора системы $x_{-s}(\cdot) = (x_1(\cdot)_{-s}, x_2(\cdot)_{-s}, \ldots, x_n(\cdot)_{-s}) = \{(x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s, 0}} = \{x(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s, 0}}$;

2) известна история реализации управляющего воздействия системы $u_{-s}(\cdot) = (u_1(\cdot)_{-s}, u_2(\cdot)_{-s}, \ldots, u_p(\cdot)_{-s}) = \{(u_1(\tau), u_2(\tau), \ldots, u_p(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s, -1}} = \{u(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s, -1}}$;

3) известна история реализации вектора детерминированных рисков системы $v_{-s}(\cdot) = (v_1(\cdot)_{-s}, v_2(\cdot)_{-s}, \ldots, v_q(\cdot)_{-s}) = \{(v_1(\tau), v_2(\tau), \ldots, v_q(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s, -1}} = \{v(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s, -1}}$;

4) известна история реализации вектора стохастических рисков системы $w_{-s}(\cdot) = (w_1(\cdot)_{-s}, w_2(\cdot)_{-s}, \ldots, w_m(\cdot)_{-s}) = \{(w_1(\tau), w_2(\tau), \ldots, w_m(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s, -1}} = \{w(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s, -1}}$.

На основе этих данных можно решить задачу идентификации [2] всех основных элементов дискретной динамической системы (1), т. е. определить элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$.

Отметим также, что на основе этих данных и другой информации (например, новых возможностей для расширения ресурсов управляющего субъекта) формируются ограничения (2)–(4).

Пусть

$\boldsymbol{U}(\overline{0,T}) = \{u_T(\cdot): u_T(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,\ T-1}} \in \mathbf{R}^{(p\times T)}$, $\forall t \in \overline{0, T-1},\ u(t) \in U_1\}$ — есть множество всех допустимых реализаций программных управлений $u_T(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации управления) на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$, которое является конечным множеством;

$\boldsymbol{V}(\overline{0,T}) = \{v_T(\cdot) : v_T(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0,\ T-1}} \in \mathbf{R}^{(q\times T)}$, $\forall t \in \overline{0, T-1},\ v(t) \in V_1\}$ — есть множество всех допустимых реализаций вектора детерминированных рисков $v_T(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации вектора детерминированных рисков) на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$;

$\boldsymbol{W}_{\overline{w}_T(\cdot)}(\overline{0,T}) = \{w_T(\cdot): w_T(\cdot) = \{w(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m\times T)}$, $\forall t \in \overline{0, T-1},\ w(t) \in W_1(w(t))\}$ — есть множество всех допустимых реализаций вектора стохастических рисков $w_T(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации вектора стохастических рисков) на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$, соответствующее фиксированной на этом же промежутке времени реализации $\overline{w}_T(\cdot) = \{\overline{w}(\tau)\}_{\tau \in \overline{0,\,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m\times T)}$.

Выберем конкретное допустимое программное управление $u_T^*(\cdot)=\{u^*(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, $\forall t \in \overline{0,T-1}$, $u^*(t) \in U_1$, из конечного множества $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ всех допустимых программных управлений $u_T(\cdot)$ на промежутке времени $\overline{0,T}$.

Тогда при реализации фиксированных и допустимых программного управления $u_T^*(\cdot)\in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, вектора детерминированных рисков $v_T^*(\cdot)\in\boldsymbol{V}(\overline{0,T})$, и вектора стохастических рисков $w_T^*(\cdot)\in\boldsymbol{W}_{\overline{w}_T(\cdot)}(\overline{0,T})$, соответствующего фиксированной реализации $\overline{w}_T(\cdot) = \{\overline{w}(\tau)\}_{\tau \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m\times T)}$, система (1) перейдет в систему вида:

$$x^*(t+1)=A(t)x^*(t+1)+B(t)u^*(t)+C(t)v^*(t)+D(t)w^*(t),$$
$$\forall t \in \overline{0,\,T-1},\ x^*(0) = x_0, \qquad (5)$$

где $x^*(T)=x_{\overline{0,T}}(T;x_0,u_T^*(\cdot),v_T^*(\cdot),w_T^*(\cdot))$ есть состояние в момент времени T траектории рассматриваемого процесса управления СЭБР, порожденной системой (1)−(4) и соответствующей набору $(x_0,u_T^*(\cdot),v_T^*(\cdot),w_T^*(\cdot))$, т. е. финальное состояние этой системы.

Предположим, что для всех допустимых реализаций наборов $(x_0,\ u_T(\cdot),\ v_T(\cdot),\ w_T(\cdot))$, $x(0) = x_0$, $u_T(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, $v_T(\cdot) \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$ и $w_T(\cdot) \in \boldsymbol{W}_{\overline{w}_T(\cdot)}(\overline{0,T})$, для фиксированной реализации $\overline{w}_T(\cdot) = \{\overline{w}(\tau)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m\times T)}$, качество процесса управления в системе (1)−(4), описывающей СЭБР, предлагается оценивать, например, векторным терминальным функционалом (показателем качества процесса) $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}=(\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},\ldots,\Phi_r^{(1)})$, представляющим из себя набор из r выпуклых функционалов $\Phi_i^{(1)}$, $i \in \overline{1,r}$, значения которых оценивают уровень СЭБР и определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_i^{(1)}(x_0,\ u_T(\cdot),\ v_T(\cdot),w_T(\cdot))=F_i(x(T)=$$
$$=F_i(x_{\overline{0,T}}(T;x_0,u_T(\cdot),v_T(\cdot),w_T(\cdot))),\ i\in\overline{1,r}, \quad (6)$$

где $F_i:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ — есть выпуклый функционал для каждого $i \in \overline{1,r}$;.

Отметим, что с помощью функционала $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}=(\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},\ldots,\Phi_r^{(1)})$, на основании соотношения (6), определяющего его значения, можно оценивать также и влияние ущерба, который возможен при реализации конкретного вектора детерминированных рисков $v_T(\cdot) \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$.

2. Методика прогнозирования и оценки временных рядов стохастических рисков в процессе оптимизации СЭБР

Перейдем к анализу множества $\boldsymbol{W}_{\overline{w}_T(\cdot)}(\overline{0,\mathrm{T}})$ всех допустимых реализаций векторов стохастических рисков $w_T(\cdot)$, соответствующего фиксированной на этом же промежутке времени реализации $\overline{w}_T(\cdot)$, а также формированию критерия качества для оценивания их влияния на результат СЭБР на промежутке времени $\overline{0,T}$.

Для этого приведем описание предлагаемой вероятностной методики прогнозирования и оценки стохастических рисков.

Рассмотрим первый промежуток времени $\overline{0,1}$ из основного целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$ $(T>0)$ и пусть временной ряд $\{w_k(\tau)\}_{\tau\in\overline{-s,-1}}$ $(k \in 1,m)$ — есть история реализации k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,0}$, предшествующем основному промежутку времени.

Пусть построена, например, эконометрическая авторегрессионная модель прогнозирования значений временного ряда, описывающая возможные значения параметра риска $w_k(0)$ $(k \in \overline{1,m})$ на основе реализаций его предыдущих значений (известных субъекту управления) на промежутке времени $\overline{-s,0}$, в виде:

$$w_k(0) = a_0^{(0)}+a_1^{(0)}w_k(-1)+a_2^{(0)}w_k(-2)+\ldots$$
$$\ldots+a_{s-1}^{(0)}w_k(-s+1)+a_s^{(0)}w_k(-s)+\varepsilon_0^{(k)}, \quad (7)$$

где набор $\{w_k(\tau)\}_{\tau\in\overline{-s,-1}}$ $(k \in \overline{1,m})$ — есть реализации значений временного ряда k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,0}$; $a_0^{(0)},a_1^{(0)},a_2^{(0)},\ldots,a_{s-1}^{(0)},a_s^{(0)}$ — есть числовые коэффициенты авторегрессии, которые могут быть определены, например, с использованием метода наименьших квадратов; $\varepsilon_0^{(k)}$ — случайная компонента (имеющая, например, нормальное распределение), связанная с ошибками наблюдения и погрешностями рассматриваемой модели, для которой могут быть вычислены ее вероятностные характеристики.

Рассмотрим второй промежуток времени $\overline{0,2}$ из основного целочисленного промежутка времени $\overline{0,\mathrm{T}}$ $(T>0)$ и пусть новый временной ряд $\{w_k(\tau)\}_{\tau\in\overline{-s,-1}}$ $(k \in \overline{1,m})$ — есть история и прогноз возможной реализации k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,1}$, которые образованы из предыдущего временного ряда путем присоединения вновь найденного прогнозного значения $w_k(0)$ этого параметра стохастического риска, соответствующего моменту времени $t = 0$.

Пусть, как и на предыдущем промежутке времени, аналогичным образом построена эконометрическая авторегрессионная модель прогнозирования значений временного ряда, описывающая возможные значения параметра риска $w_k(1)$ $(k \in \overline{1,m})$ на основе реализаций его предыдущих значений (известных субъекту управления) на промежутке времени $\overline{-s,1}$, в виде:

$$w_k(1) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} w_k(0) + a_2^{(1)} w_k(-1) + \ldots \\ \ldots + a_s^{(1)} w_k(-s+1) + a_{s+1}^{(1)} w_k(-s) + \varepsilon_1^{(k)}, \quad (8)$$

где набор $\{w_k(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,0}}$ — есть реализации и прогнозные значения временного ряда k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,1}$; $a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_s^{(1)}, a_{s+1}^{(1)}$ — есть новые числовые коэффициенты авторегрессии, которые могут быть определены, например, с использованием метода наименьших квадратов; $\varepsilon_1^{(k)}$ — случайная компонента (имеющая, например, нормальное распределение), связанная с ошибками наблюдения и погрешностями рассматриваемой модели, для которой могут быть вычислены ее вероятностные характеристики.

Продолжая описанный выше процесс, предположим, что для заданного момента времени $t \in \overline{3,T}$, определяющего промежуток времени $\overline{0,t}$ из основного целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$ $(T > 0)$, пусть сформирован временной ряд $\{w_k(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,t-2}}$ $(k \in \overline{1,m})$ — есть история и прогноз возможной реализации k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,t-1}$, которые образованы из предыдущего временного ряда путем присоединения вновь найденного прогнозного значения $w_k(t-2)$ этого параметра стохастического риска, соответствующего моменту времени $(t-2)$.

Пусть аналогично вышеописанному построена эконометрическая авторегрессионная модель прогнозирования значений временного ряда, описывающая возможные значения параметра риска $\{w_k(t-1)\}$, $(k \in \overline{1,m})$ на основе реализаций его предыдущих значений (известных субъекту управления) на промежутке времени $\overline{-s,\ t-1}$, в виде:

$$w_k(t-1) = a_0^{(t-1)} + a_1^{(t-1)} w_k(t-2) + a_2^{(t-1)} w_k(t-3) + \ldots \\ \ldots + a_{(s+t-2)}^{(t-1)} w_k(-s+1) + a_{(s+t-1)}^{(t-1)} w_k(-s) + \varepsilon_{t-1}^{(k)}, \quad (9)$$

где набор $\{w_k(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,t-2}}$ — есть реализации и прогнозные значения временного ряда k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,\ t-1}$; $a_0^{(t-1)}, a_1^{(t-1)}, a_2^{(t-1)}, \ldots, a_{(s+t-2)}^{(t-1)}, a_{(s+t-1)}^{(t-1)}$ — есть новые числовые коэффициенты авторегрессии, которые могут быть определены также с использованием метода наименьших квадратов; $\varepsilon_{t-1}^{(k)}$ — случайная компонента (имеющая, например, нормальное распределение), связанная с ошибками наблюдения и погрешностями рассматриваемой модели, для которой могут быть вычислены ее вероятностные характеристики.

В частности, для финального момента времени T в итоге будет сформирован прогнозный временной ряд $\{w_k(\tau)\}_{\tau \in \overline{0,T-1}}$ $(k \in \overline{1,m})$ — есть прогноз возможных реализаций k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{0,T}$, который образован путем использования описанной выше эконометрической авторегрессионной модели прогнозирования. Причем, возможные значения параметра риска $w_k(T-1)$ $(k \in \overline{1,m})$ в момент времени $(T-1)$ на финальном промежутке времени $\overline{T-1,T}$ определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$w_k(T-1) = a_0^{(T-1)} + a_1^{(T-1)} w_k(t-2) + a_2^{(T-1)} w_k(t-3) + \ldots \\ \ldots + a_{(s+T-2)}^{(T-1)} w_k(-s+1) + a_{(s+T-1)}^{(T-1)} w_k(-s) + \varepsilon_{T-1}^{(k)}, \quad (10)$$

где набор $\{w_k(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,T-1}}$ — есть реализации и прогнозные значения временного ряда k-го параметра вектора стохастических рисков на промежутке времени $\overline{-s,\ T-1}$; $a_0^{(T-1)}, a_1^{(T-1)}, a_2^{(T-1)}, \ldots, a_{(s+T-2)}^{(T-1)}, a_{(s+T-1)}^{(T-1)}$ — есть числовые коэффициенты авторегрессии, которые могут быть определены также с использованием метода наименьших квадратов; $\varepsilon_{T-1}^{(k)}$ — случайная компонента (имеющая, например, нормальное распределение), связанная с ошибками наблюдения и погрешностями рассматриваемой модели, для которой могут быть вычислены ее вероятностные характеристики. Обычно предполагается, что $\varepsilon_t^{(k)}$, для всех $t \in \overline{0,T-1}$ — есть случайный процесс типа «белого шума», причем математическое ожидание $\boldsymbol{M}\varepsilon_t^{(k)} = 0$, а дисперсия $\boldsymbol{D}\varepsilon_t^{(k)} = \sigma^2$.

Перейдем к формированию критерия качества для оценки влияния прогнозируемой реализации стохастических рисков $w_T(\cdot)$ на результат СЭБР на промежутке времени $\overline{0,T}$.

Пусть $\boldsymbol{S}$: $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ — есть линейный функционал, значения которого $\boldsymbol{S}(w_k(t))$ соответствуют объему прогнозируемого ущерба для СЭБР в момент времени $t \in \overline{0, T-1}$ при реализации значения $w_k(t) \in \mathbf{R}^1$ для k-го параметра прогнозируемого вектора стохастических рисков $w(t) \in \mathbf{R}^m$, а $\boldsymbol{P}(w_k(t) \leq \xi_k(t))$ — есть вероятность того, что значение этого параметра не превзойдет заданного фиксированного числового значения $\xi_k(t) \in \mathbf{R}^1$ — уровня возможной реализации данного параметра риска, которая определяется на основании знания функции распределения случайной величины $w_k(t)$.

Тогда для оценки k-го параметра прогнозируемого вектора стохастических рисков $w_k(t)$, соответствующего заданному конечному значению числового параметра $\xi_k(t) \in \mathbf{R}^1$, предлагается взять выражение вида

$$\Phi_k^{(2)}(w_k(t), \xi_k(t)) = \\ = P(w_k(t) \leq \xi_k(t)) \times S(w_k(t) = \xi_k(t)), \quad (11)$$

а в качестве критерия оценки качества прогнозируемой реализации в момент времени $t \in \overline{0, T-1}$ вектора стохастических рисков $w(t) = \{w_k(t)\}_{k \in \overline{1,m}} \in \mathbf{R}^m$, соответствующего заданному числовому набору конечных значений параметров $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}_{k \in \overline{1,m}} \in \mathbf{R}^m$, предлагается взять векторный функционал $\Phi^{(2)}: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ вида:

$$\Phi^{(2)}(w(t), \xi(t)) = (\Phi_1^{(2)}(w_1(t), \xi_1(t)), \\ \Phi_2^{(2)}(w_2(t), \xi_2(t)), \ldots, \Phi_m^{(2)}(w_m(t), \xi_m(t))). \quad (12)$$

В качестве интегрального критерия оценки качества для допустимого прогноза реализации вектора стохастических рисков $w_T(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m \times T)}$ на основном промежутке времени $\overline{0, T}$, соответствующего заданному числовому набору конечных значений параметров $\xi_T(\cdot) = \{\xi(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m \times T)}$, предлагается взять функционал $\Phi^{(2)}: \mathbf{R}^{(m \times T)} \times \mathbf{R}^{(m \times T)} \to \mathbf{R}^1$, значения которого определяются в соответствии со следующим выражением:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(w_T(\cdot), \xi_T(\cdot)) = \sum_{t=0}^{T-1} \Phi^{(2)}(w(t), \xi(t)). \quad (13)$$

На основании введенных соотношениями (6) и (13) функционалов $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot), w_T(\cdot))$ и $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(w_T(\cdot), \xi_T(\cdot))$ для оценки качества рассматриваемого процесса оптимизации СЭБР введем в рассмотрение целевую функцию $\boldsymbol{\Phi}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot), w_T(\cdot), \xi_T(\cdot))$, значения которой для всех допустимых на промежутке времени $\overline{0, T}$ реализаций наборов (x_0, $u_T(\cdot)$, $v_T(\cdot)$, $w_T(\cdot)$), где $u_T(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, $v_T(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$, $w_T(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{W}(\overline{0,T})$ — прогноз вектора стохастических рисков и $\xi_T(\cdot) = \{\xi(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m \times T)}$ — заданный фиксированный набор, определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\Phi}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot), w_T(\cdot), \xi_T(\cdot)) = \\ = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \boldsymbol{\Phi}_i^{(1)}(x_0,\ u_T(\cdot),\ v_T(\cdot), w_T(\cdot)) + \\ + \mu_{r+1} \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(w_T(\cdot), \xi_T(\cdot)), \\ \forall i \in \overline{1, r+1}: \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r+1} \mu_i = 1. \quad (14)$$

Отметим, что целевая функция $\boldsymbol{\Phi}$ (x_0, $u_T(\cdot)$, $v_T(\cdot)$, $w_T(\cdot)$, $\xi_T(\cdot)$) является скалярной сверткой векторного функционала $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot), w_T(\cdot))$ и функционала $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(w_T(\cdot), \xi_T(\cdot))$, т. е. она формируется в соответствии с методом скаляризации векторных целевых функций (см., например, [6]), с весовыми коэффициентами μ_i, $i \in \overline{1, r+1}$, которые могут определяться, например, экспертным путем или на основании знания статистической информации об истории реализации основных параметров рассматриваемого процесса.

3. Постановка задачи минимаксного программного управления СЭБР

Тогда содержательно задача оптимизации гарантированного результата программного управления СЭБР при наличии детерминированных и стохастических рисков может быть сформулирована следующим образом.

Для рассматриваемого на заданном промежутке времени $\overline{0, T}$ процесса оптимизации программного управления СЭБР, описываемого экономико-математической моделью (1)–(14), заданных начального фазового вектора системы $x(0) = x_0$, фиксированного набора $\xi_{\overline{0,T}}(\cdot) = \{\xi(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(m \times T)}$ и сформированного в соответствии с (7)–(10) допустимого прогноза реализации вектора стохастических рисков $\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot) = \{\overline{w}(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in R^{(m \times T)}$, требуется найти такое допустимое программное управление $u_{\overline{0,T}}^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0, T}$, что оно гарантирует субъекту управления результат, оцениваемый целевой функцией вида (14), который является наименьшим по сравнению с результатами, возможными при реализации любых других допустимых управления $u_{\overline{0,T}}(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и вектора стохастических рисков $w_{\overline{0,T}}(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})$ на этом же промежутке времени, т. е. для значений целевой функции, соответствующих этим программным управлениям и реализациям рисков, должно выполняться следующее условие экстремальности:

$$\boldsymbol{\Phi}(x_0, u^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot), v_{\overline{0,T}}(\cdot), w_{\overline{0,T}}(\cdot), \xi_{\overline{0,T}}(\cdot)) \le$$
$$\le \max_{\substack{v_{\overline{0,T}}(\cdot)\in V(\overline{0,T}) \\ w_{\overline{0,T}}(\cdot)\in W_{\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})}} \boldsymbol{\Phi}(x_0, u_{\overline{0,T}}(\cdot), v_{\overline{0,T}}(\cdot), w_{\overline{0,T}}(\cdot), \xi_{\overline{0,T}}(\cdot)). \quad (15)$$

Отметим, что условие (15) есть условие гарантированной оптимальности или условие минимакса для управления СЭБР при реализации процесса на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$.

На основании сформированной выше экономико-математической модели (1)–(14), описывающей динамику основных параметров СЭБР на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$, можно сформулировать следующую задачу программного минимаксного управления СЭБР при наличии детерминированных и стохастических рисков.

Задача 1. Для заданных промежутка времени $\overline{0,T}$, начального фазового вектора системы $x(0)=x_0$, фиксированного набора $\xi_{\overline{0,T}}(\cdot)=\{\xi(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\mathbf{R}^{(m\times T)}$ и сформированного в соответствии с (7)–(10) допустимого прогноза реализации вектора стохастических рисков $\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)=\{\bar{w}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\mathbf{R}^{(m\times T)}$, требуется найти множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T},\xi_{\overline{0,T}}(\cdot),\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot))\subseteq\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ программных управлений $u^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot)=\{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, удовлетворяющих следующему условию минимакса:

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T},\xi_{\overline{0,T}}(\cdot),\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot))=$$
$$=\{u^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot):\ u^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot)=\{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T}),$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)}=\max_{\substack{v_{\overline{0,T}}(\cdot)\in V(\overline{0,T}) \\ w_{\overline{0,T}}(\cdot)\in W_{\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})}}\{$$
$$\boldsymbol{\Phi}(x_0,u^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot),v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot),\xi_{\overline{0,T}}(\cdot))\}=$$
$$=\min_{u_{\overline{0,T}}(\cdot)\in U(\overline{0,T})}\ \max_{\substack{v_{\overline{0,T}}(\cdot)\in V(\overline{0,T}) \\ w_{\overline{0,T}}(\cdot)\in W_{\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})}}\{$$
$$\boldsymbol{\Phi}(x_0,u_{\overline{0,T}}(\cdot),v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot),\xi_{\overline{0,T}}(\cdot))\}\}, \quad (16)$$

которое будем называть множеством программных минимаксных управлений для этой задачи, соответствующим заданному набору $\xi_{\overline{0,T}}(\cdot)$ и прогнозу реализации вектора стохастических рисков $\bar{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)$, а число $\boldsymbol{\Phi}^{(e)}$ будем называть оптимальным гарантированным или минимаксным результатом для данной задачи.

Отметим, что, учитывая конечность множества допустимых программных управлений $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и (15), (16), можно показать (см., например, [7]), что решение задачи 1 существует и сводится к решению конечного числа оптимизационных задач с выпуклыми и линейными функционалами качества соответствующих процессов, а также задачи дискретной оптимизации.

4. Общая схема решения задачи 1.

Для любых фиксированных промежутка времени $\overline{\tau,\vartheta}\subseteq\overline{0,T}$ $(\tau<\vartheta)$ и набора $(X(\tau),u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot),\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot))\in\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}\times\boldsymbol{U}(\overline{\tau,\vartheta})\times\boldsymbol{W}_{\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\overline{\tau,\vartheta})$, где $X(\tau)\subset\mathbf{R}^n$ $(X(0)=\{x_0\})$ есть выпуклый замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^n$ (одноточечное множество $\{x_0\}$ считается таковым — по определению); $\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}$ — есть множество всех подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$; $u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{\tau,\vartheta})$ — есть допустимое программное управления на промежутке времени $\overline{\tau,\vartheta}$, а $\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)\in\mathbf{R}^{(m\times T)}$ — есть сформированный в соответствии с (7)–(10) допустимый прогноз реализации вектора стохастических рисков на этом же промежутке времени, на основании (1)−(4) введем следующее множество:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),\vartheta,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,\vartheta}),\boldsymbol{W}_{\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\overline{\tau,\vartheta}))=$$
$$=\{x(\vartheta):x(\vartheta)\in\mathbf{R}^n,$$
$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+$$
$$+C(t)v(t)+D(t)\bar{w}(t),$$
$$\forall t\in\overline{\tau,\vartheta-1}, v(t)\in V_1, \bar{w}(t)\in W_1(\bar{w}(t)),$$
$$u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}},$$
$$v_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{v(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}}\in\boldsymbol{V}(\overline{\tau,\vartheta}),$$
$$\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{\bar{w}(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}}\in\boldsymbol{W}_{\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\overline{\tau,\vartheta})\}, \quad (17)$$

которое будем называть областью достижимости или прогнозным множеством [2] фазовых состояний системы (1)−(4) на момент времени ϑ, соответствующей набору $(X(\tau),u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot),\bar{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot))$.

Учитывая линейность рекуррентной динамической системы (1) и введенные условия на множества V_1 и $W_1(\bar{w}(t))$, которые являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными многогранниками в пространствах $\mathbf{R}^q$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, аналогично [7] можно показать, что для фиксированного программного управления

$u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}}\in \boldsymbol{U}(\overline{\tau,\vartheta})$ справедливы следующие свойства введенного множества:

1) $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),t,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,t}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(\overline{\tau,t}))=$ $=X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t)$ для всех $t\in\overline{\tau+1,\vartheta}$ есть непустой, выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^n$ ($u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,t-1}}$) (см., например, [7,8]);

2) для всех $t\in\overline{\tau,\vartheta-1}$ и $X^{(+)}_{u_{\overline{0,\tau}}(\cdot)}(\tau)=X(\tau)$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,t+1}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(\overline{\tau,t+1}))=$$
$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(\overline{t,t+1}))=$$
$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u(t)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,V_1,W_1(\overline{w}(t))). \quad (18)$$

Тогда из соотношения (18) следует, что многошаговая задача построения области достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),\vartheta,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,\vartheta}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\overline{\tau,\vartheta}))$ сводится к решению конечной рекуррентной последовательности только одношаговых задач построения соответственно следующих областей достижимости:

$$X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(t+1)=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(\overline{t,t+1}))=$$
$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u(t)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,V_1,W_1(\overline{w}(t))),$$
$$t\in\overline{\tau,\vartheta-1},\ X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\tau}}(\cdot)}(\tau)=X(\tau). \quad (19)$$

На основании этих свойств общая схема решения задачи 1 для динамической системы (1)–(4) может быть описана в виде реализации следующей последовательности действий.

1. Упорядочим по возрастанию натурального индекса j конечное множество $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ состоящее из N_u допустимых программных управлений $u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)=\{u^{(j)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, т. е. имеем $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})=\{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)\}_{j\in\overline{1,N_u}}$.

2. Для фиксированного и допустимого программного управления $u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})(j\in\overline{1,N_u})$, в силу отмеченного выше свойства, область достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T}))$ рассматриваемой динамической системы (1)–(4) на финальный момент времени T, соответствующая фиксированному набору $(X(0),u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot))\in\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}\times\boldsymbol{U}(\overline{0,T})\times\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})$, есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^n$, которая строится на основании рекуррентных формул (18), (19) путем реализации построения T одношаговых областей достижимости, а именно:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t+1}}(\cdot)}(0,X(0),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{0,t+1}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,t+1}}(\cdot)}(\overline{0,t+1}))=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(t),$$
$$t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(\overline{t,t+1}))=$$
$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}(t)}(t,X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(t),t+1,V_1,W_1(\overline{w}(t))), \quad (20)$$

где $X(0)=\{x_0\}$; $X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(t)=X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(0,X(0),t,\boldsymbol{V}(\overline{0,t}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(\overline{0,t}))$.

3. Для выбранного фиксированного программного управления $u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ $(j\in\overline{1,N_u})$ и построенной, соответствующей ему области достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T}))$, являющейся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^n$, из решения задачи выпуклого математического программирования с выпуклым терминальным функционалом $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}$ вида

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}(x_0,\ u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),\ v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot))=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\Phi^{(1)}_i(x_0,\ u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),\ v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot)), \quad (21)$$

сформированным из функционала $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}$ на основании (14), и линейными ограничениями, описывающими область достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}),\boldsymbol{W}_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T}))$ (см., например, [7,8]), в соответствии с (6), (14)–(15) находится следующее значение этого функционала:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}(x_0,u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),v^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot),w^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot))=$$
$$=\max_{\substack{v_{\overline{0,T}}(\cdot)\in V(\overline{0,T})\\ w_{\overline{0,T}}(\cdot)\in W_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})}}\boldsymbol{\Phi}^{(1)}(x_0,u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot))=$$
$$=\max_{\substack{v_{\overline{0,T}}(\cdot)\in V(\overline{0,T})\\ w_{\overline{0,T}}(\cdot)\in W_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T})}}\sum_{i=1}^{r}\mu_i\Phi^{(1)}_i(x_0,u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot),v_{\overline{0,T}}(\cdot),w_{\overline{0,T}}(\cdot))=$$
$$=\max_{x(T)\in X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(0,X(0),T,V(\overline{0,T}),W_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T}))}\sum_{i=1}^{r}\mu_i F_i(x_{\overline{0,T}}(T;x_0,$$

$$u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot), v_{\overline{0,T}}(\cdot), w_{\overline{0,T}}(\cdot))) =$$

$$= \max_{x(T) \in X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0\,T}}(\cdot)}(0, X(0), T, V(\overline{0,T}), W_{\overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)}(\overline{0,T}))} \sum_{i=1}^{r} \mu_i F_i(x(T)). \quad (22)$$

где $x(T) = x_{\overline{0,T}}(T; x_0, u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot), v_{\overline{0,T}}(\cdot), w_{\overline{0,T}}(\cdot))$.

Отметим, что для решения данной задачи можно использовать метод Зойтендейка (см., например, [1]).

4. Из решения следующей дискретной оптимизационной задачи находится множество $\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T}, \xi_{\overline{0,T}}(\cdot), \overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot))$ программных управлений $\tilde{u}^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и числовое значение $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1,e)}$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T}, \xi_{\overline{0,T}}(\cdot), \overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)) =$$

$$= \{\tilde{u}^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot) : \tilde{u}^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T}),$$

$$\min_{u_{\overline{0,T}}(\cdot) \in U(\overline{0,T})} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}_{u_{\overline{0,T}}(\cdot)} = \min_{j \in \overline{1,N_u}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}_{u^{(j)}_{\overline{0,T}}(\cdot)} =$$

$$= \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1,e)}_{\tilde{u}^{(e)}_{\overline{0,T}}(\cdot)} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1,e)}\}. \quad (23)$$

5. Пусть в соответствии с (13), (14) вычисляется значение

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(1,e)} + \mu_{r+1} \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\overline{w}_T(\cdot), \xi_T(\cdot)).$$

На основании результатов из [7], [8] и соотношений (11)−(23), можно показать, что справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T}, \xi_{\overline{0,T}}(\cdot), \overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)) = \tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T}, \xi_{\overline{0,T}}(\cdot), \overline{w}_{\overline{0,T}}(\cdot)),$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(e)}. \quad (24)$$

Выполнение равенства (24) означает, что в результате реализации предлагаемой общей схемы — найдено полное решение рассматриваемой задачи 1.

Отметим что построение одношаговых областей достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}(t)}(t, X^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{0,t}}(\cdot)}(t), t+1, V_1, W_1(w(t))), \forall t \in \overline{0,T-1}$ $(j \in \overline{1, N_u})$, фигурирующих в формуле (19), можно реализовать аналогично вычислительному алгоритму из [7], который сводит решение этой задачи к реализации решений конечного числа задач линейного математического программирования.

Тогда можно сделать общий вывод, что решение задачи 1 программного минимаксного управления СЭБР при наличии детерминированных и стохастических рисков находится путем выполнения предлагаемой общей схемы и сводится к реализации решений конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования, а также задачи дискретной оптимизации. Предлагаемые в данной статье методика прогнозирования и оценки временных рядов стохастических рисков и общая схема решения сформулированной задачи 1 предоставляют возможность разрабатывать эффективные численные методы, позволяющие реализовать компьютерное моделирование решения этих задач.

Список источников

1. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.
2. 2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
3. 3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
4. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.
5. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.
6. Тер-*Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
7. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы: сб. научн. тр. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2005. — С. 119-138.
8. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1997.

Сведения об авторе

Шориков Андрей Федорович (Екатеринбург) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории управления и инноваций, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (620014, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 13 б, e-mail: afshorikov@mail.ru).

A. F. Shorikov

Dynamic model of minimax control over economic security state of the region in the presence of risks[1]

Investigation and solution of management of economic security state in the region (MESSR) requires development of a dynamic economic-mathematical model that takes into account the presence of control actions, uncontrolled parameters (risk modeling errors, etc.) and availability of information deficit. At the same time, the existing approaches to solving such problems are based primarily

[1] This work was supported by RFBR — Russian Foundation for Basic Research (project № 12-01-00024-a).

on static models and the use of stochastic modeling of the device, which is required for the application of knowledge of the probability characteristics of the main model parameters and special conditions for the realization of the process. We should note that to use the apparatus of stochastic modeling, very strict conditions are required, which in practice are usually not feasible in advance

In this paper, we propose to use a deterministic approach for modeling and solving the original problem in the form of a dynamic programming problem of minimax control (optimization of a guaranteed result) MESSR at the determined point of time, taking into account the availability of risks of deterministic and stochastic nature (combined risks model).

At the same time, under the risks in the social and economic system we understand the factors that negatively catastrophically affect the results of the reviewed processes inside it.

For an effective use, a technique of prediction and assessment of time rows and stochastic risks in MESSR optimization process is presented, which can serve as a basis for the development of appropriate computer software.

To solve the problem of program minimax control MESSR in the presence of risks, we propose a method which is reduced to the realization of a finite number of solutions of linear and convex mathematical programming and discrete optimization problem. The proposed method makes it possible to develop efficient numerical procedures to implement computer simulation of the dynamics of the problem, build program minimax control and gain optimal guaranteed result.

The results presented in this paper are based on studies [2], [3], [7] and [8] and can be used for economic-mathematical modeling and solving other optimization problems of forecasting processes and data management in a lack of information and the availability of risks, as well as to develop appropriate software and hardware systems to support effective management decisions in practice. Economic-mathematical model of such problems are presented, for example, in works [4]-[6].

Keywords: economic-mathematical modeling, economical and mathematical modeling, discrete dynamical systems, deterministic and stochastic risks, multi criteria optimization, program minimax control, estimated variety

References

1. *Bazara M.*, *Shetti K.* (1982). Nelineynoe programmirovanie. Teoriya i algoritmy [Non-linear programming. Theory and algorithms]. Moscow, Mir.

2. *Krasovskiy N. N.* (1968). Teoriya upravleniya dvizheniem [Theory of motion control]. Moscow, Nauka.

3. *Krasovskiy N. N.*, *Subbotin A. I.* (1974). Pozitsionnye differentsial'nye igry [Positional differential games]. Moscow, Nauka.

4. *Lotov A. V.* (1984). Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [Introduction to economical and mathematical modeling]. Moscow, Nauka.

5. *Propoy A. I.* (1973). Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moscow, Nauka.

6. Ter-*Krikorov A. M.* (1977). Optimal'noe upravlenie i matematicheskaya ekonomika [Optimal control and mathematical economics]. Moscow, Nauka.

7. *Shorikov A. F.* (2005). Algoritm resheniya zadachi optimal'nogo terminal'nogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [An algorithm for solving the problem of optimal terminal control for linear discrete dynamical systems]. Informatsionnye tekhnologii v ekonomike: teoriya, modeli i metody: sb. nauchn. tr. [Information technology in economics: theory, models and methods: digest of scientific works] — Yekaterinburg, Ural State University of Economics Publ., 119-138.

8. *Shorikov A. F.* (1997). Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Yekaterinburg, Ural State University Publ.

Information about the author

Shorikov Andrey Fedorovich (Yekaterinburg, Russia) — Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Chair for Management Theory and Innovations, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin» (620014, Yekaterinburg, pr. Lenina, 13 "B", e-mail: afshorikov@mail.ru).