УДК 330.46:519.86; 631.152:004

А. Ф. Шориков, В. А. Бабенко

ОПТИМИЗАЦИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИННОВАЦИОННЫМ ПРОЦЕССОМ НА ПРЕДПРИЯТИИ[1]

Исследование и решение задачи управления инновационным процессом на предприятии (УИПП) требует разработки динамической экономико-математической модели, учитывающей наличие управляющих воздействий, неконтролируемых параметров (рисков, погрешностей моделирования и др.) и дефицита информации. При этом существующие подходы к решению подобных задач базируются в основном на статических моделях и используют аппарат стохастического моделирования, для применения которого требуется знание вероятностных характеристик основных параметров модели и специальных условий реализации рассматриваемого процесса. Отметим, что для использования аппарата стохастического моделирования необходимы очень жесткие условия, которые на практике обычно заранее не выполнимы.

В данной статье предлагается использовать детерминированный подход для моделирования и решения исходной задачи в форме динамической задачи программного минимаксного управления (оптимизации гарантированного результата) ИПП на заданный момент времени с учетом наличия рисков.

При этом под рисками в системе УИПП будем понимать факторы, которые влияют негативно или катастрофически на результаты рассматриваемых в ней процессов.

Для решения задачи минимаксного программного управления ИПП при наличии рисков предлагается метод, который сводится к реализации решений конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования и задачи дискретной оптимизации. Предлагаемый метод дает возможность разрабатывать эффективные численные процедуры, позволяющие реализовать компьютерное моделирование динамики рассматриваемой задачи, сформировать программное минимаксное управление ИПП и получить оптимальный гарантированный результат.

Представленные в статье результаты базируются на исследованиях [1, 2, 4, 5, 10] и могут быть использованы для экономико-математического моделирования и решения других задач оптимизации процессов прогнозирования данных и управления в условиях дефицита информации и наличия рисков, а также для разработки соответствующих программно-технических комплексов для поддержки принятия эффективных управленческих решений на практике. Экономико-математические модели таких задач представлены, например, в работах [6-8].

Ключевые слова: инновационный процесс на предприятии, экономико-математическое моделирование, дискретная динамическая система, риски, прогнозное множество, минимаксное программное управление

1. Формирование экономико-математической модели динамики УИПП

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ $(T > 0)$ рассматривается многошаговая динамическая система УИПП, которая состоит из одного управляемого объекта (предприятия), движение которого описывается линейным дискретным рекуррентным векторным уравнением вида (динамическая модель):

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t),$$
$$x(0) = x_0, \qquad (1.1)$$

где $t \in \overline{0,T-1} = \{0,1,2,\ldots,T-1\}, T > 0; x(t) \in \mathbf{R}^n$ — вектор фазовых переменных или фазовый вектор — набор основных параметров, описывающих состояние УИПП в момент времени t; $\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство векторов-столбцов, $n \in \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $u(t) \in \mathbf{R}^p$ — вектор управляющего воздействия (управления), удовлетворяющий заданному ограничению:

$$u(t) \in \mathrm{U}_1 \subset \mathbf{R}^p, \tag{1.2}$$

где U_1 — конечное множество векторов, т. е. конечный набор векторов в $\mathbf{R}^p$, определяющих все возможные реализации различных сценариев управления в момент времени t; $p \in \mathbf{N}$; $v(t) \in \mathbf{R}^q$ — вектор рисков, влияющих на процесс реализации УИПП, удовлетворяющий заданному ограничению:

$$v(t) \in \mathrm{V}_1 \subset \mathbf{R}^q, \tag{1.3}$$

где V_1 — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник пространства $\mathbf{R}^q$, т. е. множество, которое ограничивает возможные значения реализации вектора рисков в момент времени t; $q \in \mathbf{N}$; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times p)$ и $(n \times q)$ соответственно, определяющие динамику УИПП.

Опишем информационные возможности субъекта управления в процессе управления ИПП в дискретной динамической системе (1.1)–(1.3).

Предполагается, что по ходу реализации УИПП для фиксированного натурального числа $s >> T > 0$ в каждый момент времени $t \in \overline{1, T}$ субъект управления имеет следующие информационные возможности, соответствующие реализациям фазового вектора системы, управляющего воздействия и вектора рисков на целочисленном промежутке времени $\overline{-s, t}$, предшествующем рассматриваемому процессу управления ИПП:

1) известна история реализации фазового вектора системы $x_t(\cdot) = (x_1(\cdot)_t, x_2(\cdot)_t, \ldots, x_n(\cdot)_t) = \{(x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s,t}} = \{x(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,t}}$;

2) известна история реализации управляющего воздействия системы $u_t(\cdot) = (u_1(\cdot)_t, u_2(\cdot)_t, \ldots, u_p(\cdot)_t) = \{(u_1(\tau), u_2(\tau), \ldots, u_p(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s,t-1}} = \{u(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,t-1}}$;

3) известна история реализации вектора рисков системы $v_t(\cdot) = (v_1(\cdot)_t, v_2(\cdot)_t, \ldots, v_q(\cdot)_t) = \{(v_1(\tau), v_2(\tau), \ldots, v_q(\tau))\}_{\tau \in \overline{-s,t-1}} = \{v(\tau)\}_{\tau \in \overline{-s,t-1}}$.

Отметим, что на основе этих данных можно решить задачу апостериорной идентификации [4, 9] всех основных элементов дискретной динамической системы (1.1), т. е. определить элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$.

Предполагается, что субъекту управления также известны уравнение (1.1) и ограничения (1.2), (1.3).

Рассматриваемый процесс управления оценивается значением выпуклого функционала γ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, определенного на возможных реализациях фазового вектора $x(T) \in \mathbf{R}n$ системы в финальный момент времени T.

Тогда для системы (1.1)–(1.3) цель минимаксного программного управления ИПП с точки зрения субъекта управления может быть сформулирована следующим образом: на заданном промежутке времени $\overline{0,T}$ требуется, чтобы субъект управления сформировал такое управление $u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}}$ (для всех $t \in \overline{0,T-1} : u(t) \in \mathrm{U}_1$), чтобы было минимальным значение выпуклого функционала γ, определенного на реализациях вектора $x(T) \in \mathbf{R}^n$ (где $x(T)$ есть реализация фазового вектора системы в момент времени T, соответствующая управлению $u(\cdot)$), при наихудших (т. е. максимизирующих значение функционала γ) возможных реализациях вектора рисков $v(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}}$ (для всех $t \in \overline{0,T-1} : v(t) \in \mathrm{V}_1$).

2. Формализация задачи минимаксного программного управления ИПП

Пусть на основании ограничений (1.2) и (1.3)

$$\boldsymbol{U}(\overline{0,T}) = \{u_T(\cdot) : u_T(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in \mathbf{R}^{(p \times T)}, \quad \forall t \in \overline{0,T-1}, u(t) \in \mathrm{U}_1\}, \tag{2.1}$$

есть множество всех допустимых реализаций программных управлений $u_T(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации управления) на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$, которое является конечным множеством;

$$\boldsymbol{V}(\overline{0,T}) = \{v_T(\cdot) : v_T(\cdot) = \{v(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in R^{(q \times T)}, \quad \forall t \in \overline{0,T-1}, v(t) \in \mathrm{V}_1\}, \tag{2.2}$$

есть множество всех допустимых реализаций вектора рисков $v_T(\cdot)$(всех возможных сценариев реализации вектора рисков) на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$.

Выберем конкретное допустимое программное управление $u^*_T(\cdot) = \{u^*(t)\}_{t \in \overline{0,T-1}} \in U(\overline{0,T})$, $\forall t \in \overline{0,T-1} : u^*(t) \in \mathrm{U}_1$, из конечного множества $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ всех допустимых программных управлений $u_T(\cdot)$ на промежутке времени $\overline{0,T}$.

Тогда при реализации фиксированных и допустимых программного управления $u^*_T(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и вектора рисков $v^*_T(\cdot) \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$ в силу многошагового уравнения (1.1) реализуется следующая траектория рассматриваемой системы:

$$\forall t \in \overline{0,T-1}: \quad x^*(t+1) = A(t)x^*(t+1) + B(t)u^*(t) + C(t)v^*(t), \quad x^*(0) = x_0, \tag{2.3}$$

где $x^*(T) = x_{\overline{0,T}}(T; x_0, u_T^*(\cdot), v_T^*(\cdot))$ есть состояние в момент времени T траектории рассматриваемого процесса УИПП, порожденной системой (1.1)–(1.3) и соответствующей набору $(x_0, u_T^*(\cdot), v_T^*(\cdot))$, т. е. финальное состояние этой системы.

Предположим, что для всех допустимых реализаций наборов $(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))$, $x(0) = x_0$, $u(\cdot) \in (\overline{0,T})$ и $v_T(\cdot) \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$, качество процесса управления в системе (1.1)–(1.3), описывающей УИПП, предлагается оценивать, например, векторным терминальным функционалом (показателем качества процесса) $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$, представляющим из себя набор из r выпуклых функционалов Φ_i, $i \in \overline{1, r}$, значения которых оценивают качество процесса УИПП и определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_i(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot)) = F_i(x_{\overline{0,T}}(T; x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))) =$$
$$= F_i(x(T)),\ i \in \overline{1,r}, \quad (2.4)$$

где $F_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ — есть выпуклый функционал для каждого $i \in \overline{1, r}$; $x(T) = x_{\overline{0,T}}(T; x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))$.

Отметим, что с помощью функционала $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$, на основании соотношения (2.4), определяющего его значения, можно оценивать также и влияние ущерба, который возможен при реализации конкретного вектора рисков $vT(\cdot) \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$.

На основании введенного соотношением (2.4) векторного функционала $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$ для оценки качества рассматриваемого процесса оптимизации УИПП введем в рассмотрение скалярную целевую функцию $F(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))$, значения которой для всех допустимых на промежутке времени $\overline{0,T}$ реализаций наборов $(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))$, где $u_T(\cdot) = \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и $v_T(\cdot) = \{v(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$ определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$\boldsymbol{F}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot \Phi_i(x_0,\ u_T(\cdot),\ v_T(\cdot)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot F_i(x_{\overline{0,T}}(T; x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot F_i(x(T)) =$$
$$= \gamma(x(T)),\ \forall i \in \overline{1,r} : \mu_i \ge 0, \sum_{i=1}^{r} \mu_i = 1, \quad (2.5)$$

где $x(T) = (x_{\overline{0,T}}(T; x_0,\ u_T(\cdot),\ v_T(\cdot)$, а γ есть выпуклый функционал, введенный ранее.

Отметим, что целевая функция $\boldsymbol{F}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))$ является выпуклой скалярной сверткой векторного функционала $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$, т. е. она формируется в соответствии с методом скаляризации векторных целевых функций (см., например, [8]), с неотрицательными весовыми коэффициентами $\mu_i, i \in \overline{1,r}$, которые могут определяться, например, экспертным путем или на основании знания статистической информации об истории реализации основных параметров рассматриваемого процесса.

3. Постановка задачи минимаксного программного управления ИПП

Тогда содержательно задача оптимизации гарантированного результата программного управления ИПП при наличии рисков может быть сформулирована следующим образом.

Для рассматриваемого на заданном промежутке времени $\overline{0,T}$ процесса оптимизации программного управления ИПП, описываемого экономико-математической моделью (1.1)–(1.3), (2.5), и заданного начального фазового вектора системы $x(0) = x_0$ требуется найти такое допустимое программное управление $u_T^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, что оно гарантирует субъекту управления ИПП результат, оцениваемый целевой функцией вида (2.5), который является наименьшим по сравнению с результатами, возможными при реализации любых других допустимых управления $u_T(\cdot) = \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и вектора рисков $v_T(\cdot) = \{v(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{V}(\overline{0,T})$ на этом же промежутке времени, т. е. для значений целевой функции, соответствующих этим программным управлениям и реализациям рисков, должно выполняться следующее условие экстремальности:

$$\boldsymbol{F}(x_0, u_T^{(e)}(\cdot), v_T(\cdot)) \le \max_{v_T(\cdot)\in V(\overline{0,T})} \boldsymbol{F}(x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot)). \quad (3.1)$$

Отметим, что условие (3.1) есть условие гарантированной оптимальности или условие минимакса при реализации УИПП на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$.

На основании сформированной выше экономико-математической модели (1.1)–(1.3), (2.5), описывающей динамику основных параметров УИПП на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0,T}$ и критерий качества реализации рассматриваемого процесса, можно сформулировать следующую задачу программного минимаксного управления ИПП при наличии рисков.

Задача 3.1. Для заданных промежутка времени $\overline{0,T}$ и начального фазового вектора системы $x(0) = x_0$ требуется найти множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T}) \subseteq \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ допустимых программных управлений $u_T^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, удовлетворяющих следующему условию минимакса:

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T})=\{u_T^{(e)}(\cdot):\ u_T^{(e)}(\cdot)=\{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T}),$$

$$F^{(e)}=\max_{v_T(\cdot)\in V(\overline{0,T})}\boldsymbol{F}(x_0,u_T^{(e)}(\cdot),v_T(\cdot))=$$

$$=\min_{u_T(\cdot)\in U(\overline{0,T})}\ \max_{v_T(\cdot)\in V(\overline{0,T})}\boldsymbol{F}(x_0,u_T(\cdot),v_T(\cdot))\},\qquad(3.2)$$

которое будем называть множеством минимаксных программных управлений для этой задачи, а число $\boldsymbol{F}^{(e)}$ будем называть оптимальным гарантированным, или минимаксным результатом для данной задачи УИПП.

Отметим, что, учитывая конечность множества допустимых программных управлений $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и (3.1), (3.2), можно показать (см., например, [9]), что решение задачи 3.1 существует и сводится к решению конечного числа оптимизационных задач с линейными и выпуклыми функционалами качества соответствующих процессов, а также задачи дискретной оптимизации.

4. Общая схема решения задачи 3.1

Для любых фиксированных промежутка времени $\overline{\tau,\vartheta}\subseteq\overline{0,T}$ $(t<\vartheta)$ и набора $(X(\tau),u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot))\in 2^{\mathbf{R}^n}\times U(\overline{\tau,\vartheta})$, где $X(\tau)\subset\mathbf{R}^n$ ($X(0)=\{x_0\}$) есть выпуклый замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^n$ (одноточечное множество $\{x_0\}$ считается таковым — по определению); $\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}$ есть множество всех подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$; $u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)\in U(\overline{\tau,\vartheta})$ есть допустимое программное управление на промежутке времени $\overline{\tau,\vartheta}$; на основании (1.1)–(1.3) введем следующее множество:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}\big(\tau,X(\tau),\vartheta,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,\vartheta})\big)=\{x(\vartheta):x(\vartheta)\in\mathbf{R}^n,$$

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+C(t)v(t),$$

$$u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}},\ \forall t\in\overline{\tau,\vartheta-1}:v(t)\in V_1\big\},\ (4.1)$$

которое будем называть областью достижимости или прогнозным множеством [4, 9] фазовых состояний системы (1.1)–(1.3) на момент времени ϑ, соответствующей набору $(X(\tau),u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot))$.

Учитывая линейность рекуррентной динамической системы (1.1) и введенное условие на множество V_1, которое является выпуклым, замкнутыми и ограниченным многогранникам в пространстве $\mathbf{R}^q$, аналогично [9] можно показать, что для фиксированного программного управления $u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,\vartheta-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{\tau,\vartheta})$ справедливы следующие свойства введенного множества:

1) $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),t,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,t}))=X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t)$ для всех $t\in\overline{\tau+1,\vartheta}$ есть непустой, выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^n$ ($u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{\tau,t-1}}$) (см., например [9, 10]);

2) для всех $t\in\overline{\tau,\vartheta-1}$ и $X^{(+)}_{u_{\overline{0,\tau}}(\cdot)}(\tau)=X(\tau)$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,t+1}))=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}))=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u(t)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,V_1).\qquad(4.2)$$

Тогда из соотношения (4.2) следует, что многошаговая задача построения области достижимости $X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\vartheta}}(\cdot)}(\tau,X(\tau),\vartheta,\boldsymbol{V}(\overline{\tau,\vartheta}))$ сводится к решению конечной рекуррентной последовательности только одношаговых задач построения соответственно следующих областей достижимости:

$$X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t+1}}(\cdot)}(t+1)=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}))=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u(t)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,V_1),\ t\in\overline{\tau,\vartheta-1},$$

$$X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,\tau}}(\cdot)}(\tau)=X(\tau).\qquad(4.3)$$

На основании этих свойств общая схема решения задачи 3.1 для динамической системы (1.1)–(1.3), (2.5) может быть описана в виде реализации следующей последовательности действий.

1. Упорядочим по возрастанию натурального индекса j конечное множество $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, состоящее из N_u допустимых программных управлений $u_T^{(j)}(\cdot)=\{u^{(j)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ на промежутке времени $\overline{0,T}$, т. е. имеем $\boldsymbol{U}(\overline{0,T})=\{u_T^{(j)}(\cdot)\}_{j\in\overline{1,N_u}}$.

2. Для фиксированного и допустимого программного управления $u_T^{(j)}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ ($j\in\overline{1,N_u}$), в силу отмеченного выше свойства, область достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u_T^{(j)}(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))$ рассматриваемой динамической системы (1.1)–(1.3) на финальный момент времени T, соответствующая фиксированному набору $(X(0),u_T^{(j)}(\cdot))\in\mathbf{2}^{\mathbf{R}^n}\times\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$, есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^n$, которая строится на основании рекуррентных

формул (4.2), (4.3) путем реализации построения T одношаговых областей достижимости, а именно:

$$\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{t+1}(\cdot)}(0,X(0),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{0,t+1}))=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u^{(j)}_{t}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}))=$$

$$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}(t)}(t,X^{(+)}_{u^{(j)}_{t}(\cdot)}(t),t+1,\mathrm{V}_1). \qquad (4.4)$$

где $X(0)=\{x_0\}$; $X^{(+)}_{u^{(j)}_{t}(\cdot)}(t)=X^{(+)}_{u^{(j)}_{t}(\cdot)}(0,X(0),t,\boldsymbol{V}(\overline{0,t}))$.

3. Для выбранного фиксированного программного управления $u^{(j)}_T(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ $(j\in\overline{1,N_u})$ и построенной соответствующей ему области достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_T(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))$, являющейся выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником (с конечным числом вершин) пространства $\mathbf{R}^n$, из решения задачи выпуклого математического программирования с выпуклым терминальным функционалом вида

$$\boldsymbol{F}(x_0,u_T(\cdot),v_T(\cdot)) = \sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot\Phi_i(x_0,u_T(\cdot),v_T(\cdot)),$$

$$\forall i\in\overline{1,r}:\mu_i\geq 0,\sum_{i=1}^{r}\mu_i=1,$$

сформированным из функционала $\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_r)$ на основании (2.5), и конечной системой линейных ограничений, множество решений которой описывает область достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_T(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))$ (см., например [9, 10]), в соответствии с (2.4), (2.5), (3.1) находится следующее значение этого функционала:

$$\boldsymbol{F}_{u^{(j)}_T(\cdot)} = \boldsymbol{F}(x_0,u^{(j)}_T(\cdot),v^{(e)}_T(\cdot)) =$$

$$=\max_{v_T(\cdot)\in\boldsymbol{V}(\overline{0,T})}\boldsymbol{F}(x_0,u^{(j)}_T(\cdot),v_T(\cdot)) =$$

$$=\max_{v_T(\cdot)\in\boldsymbol{V}(\overline{0,T})}\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot\Phi_i(x_0,u^{(j)}_T(\cdot),v_T(\cdot))=$$

$$=\max_{x(T)\in\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_T(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))}\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot F_i(x_{\overline{0,T}}(T;x_0,u^{(j)}_T(\cdot),v_T(\cdot))=$$

$$=\max_{x(T)\in\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_T(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))}\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot F_i(x(T)) =$$

$$=\max_{x(T)\in\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_T(\cdot)}(0,X(0),T,\boldsymbol{V}(\overline{0,T}))}\gamma(x(T)), \qquad (4.5)$$

где $x(T)=(x_{\overline{0,T}}(T;x_0,u^{(j)}_T(\cdot),v_T(\cdot))$, а γ есть выпуклый функционал, введенный ранее.

Отметим, что для решения данной задачи можно использовать метод Зойтендейка (см., например [3]).

4. На основании (4.5), из решения следующей конечной дискретной оптимизационной задачи находится множество $\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T})$ программных управлений $\tilde{u}^{(e)}_T(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T})$ и числовое значение $\tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}$:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T})=\{\tilde{u}^{(e)}_T(\cdot):\ \tilde{u}^{(e)}_T(\cdot)=\{\tilde{u}^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,T}),$$

$$\boldsymbol{F}(x_0,\tilde{u}^{(e)}_T(\cdot),v^{(e)}_T(\cdot))=\min_{u_T(\cdot)\in U(\overline{0,T})}\boldsymbol{F}_{u_T(\cdot)}=\min_{j\in\overline{1,N_u}}\boldsymbol{F}_{u^{(j)}_T(\cdot)}=$$

$$=\boldsymbol{F}_{\tilde{u}^{(e)}_T(\cdot)}=\tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}\}. \qquad (4.6)$$

На основании результатов из [9, 10] и соотношений (2.4), (2.5), (3.1), (3.2) и (4.1)–(4.6), можно показать, что справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{0,T}) = \tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(\overline{0,T}),\boldsymbol{F}(\mathrm{e}) = \tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}. \qquad (4.7)$$

Выполнение равенств (4.7) означает, что в результате реализации предлагаемой общей схемы — найдено полное решение рассматриваемой задачи 3.1.

Отметим, что построение одношаговых областей достижимости $\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}_{\overline{t,t+1}}(\cdot)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,\boldsymbol{V}(\overline{t,t+1}))=$
$=\boldsymbol{X}^{(+)}_{u^{(j)}(t)}(t,X^{(+)}_{u_{\overline{\tau,t}}(\cdot)}(t),t+1,\mathrm{V}_1)$, $t\in\overline{\tau,\vartheta-1}$, $(j\in\overline{1,N_u})$, фигурирующих в формуле (4.3), можно реализовать аналогично вычислительному алгоритму из [9], который сводит решение этой задачи к реализации решений конечного числа задач линейного математического программирования.

Тогда можно сделать общий вывод, что решение задачи 3.1 минимаксного программного управления ИПП при наличии рисков находится путем выполнения предлагаемой общей схемы и сводится к реализации решений конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования, а также задачи дискретной оптимизации.

Отметим, что предлагаемая общая схема решения сформулированной задачи 3.1 предоставляют возможность разрабатывать эффективные численные методы, позволяющие реализовать компьютерное моделирование решения этой задачи минимаксного программного управления ИПП.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00024-а).

Список источников

1. *Бабенко В. А., Шориков А. Ф.* Оптимизация программного управления инновационными технологиями на предприятиях АПК // Современные проблемы экономики, менеджмента и маркетинга. Материалы XVIII Международной научно-практ. конф. — Нижний Тагил: НТИ (ф) УрФУ, 2012. — С. 52-54.

2. *Бабенко В. А., Шориков А. Ф.* Экономико-математическая модель и общая схема оптимизации управления инновационными процессами в условиях рисков // Разработка и создание инновационной инфраструктуры Санкт-Петербургского гос. аграрного ун-та в целях повышения качества подготовки специалистов агропромышленного сектора. Материалы междунар. научн.-практ. конф. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. аграрного ун-та, 2011. — С. 9-13.

3. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.

4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

6. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.

7. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.

8. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977.

9. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы: сб. научн. тр. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2005. — С. 119-138.

10. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Информация об авторах

Шориков Андрей Федорович (Екатеринбург, Россия) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Бабенко Виталина Алексеевна (Харьков, Украина) — кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры экономической кbбернетики, Харьковский национальный аграрный университет им. В. В. Докучаева (п/в “Коммунист-1”, Харьковский район, Харьковская область, 62483, Украина, e-mail: vitalina_babenko@meta.ua).

A. F. Shorikov, V. A. Babenko

Optimization of assured result in dynamical model of management of innovation process in the enterprise of agricultural production complex

Research and the problem solution of management of innovative process at the enterprise (UIPP) demands the development of the dynamic economic-mathematical model considering the control action, uncontrolled parameters (risks, modeling errors, etc.) and deficit of information. At the same time, the existing approaches to the solution of similar problems are generally based on the static models and use the device of stochastic modeling, which requires knowledge of probabilistic characteristics of key parameters of the model and special conditions on realization of considered process. It is significant that the strict conditions are necessary for the use of the stochastic modeling, but in practice it is not possible.

In the article, it is offered to use the determined approach for the modeling and solution of an initial problems in the form of dynamic problem of program minimax control (optimization of the guaranteed result) IPP on the set timepoint taking into account risks.

At the same time, the risks in the system of UIPP are understood as the factors, which influence negatively or catastrophically on the results of the processes considered in the system.

To solve the problem of minimax program control of IPP at risks, the method to implement the solutions of the final number of the problem of linear and convex mathematical programming and a problem of discrete optimization is offered. The offered method gives the chance to develop the effective numerical procedures allowing to realize computer modeling of dynamics considered problem, to create program minimax control of IPP, and to receive the optimum guaranteed result.

The results presented in the article are based on the research [2, 3, 7-10] and can be used for economic-mathematical modeling and the solution of other problems of data forecasting process optimization and management at the deficit of information and at risks, and also for development of the corresponding software and hardware complexes to support of adoption of effective administrative decisions in practice. Economic-mathematical models of such problems are presented, for instance, in works [4-6].

Keywords: economics and mathematical modeling, commodity assortment, manycriterion optimization problem, discrete-time dynamical system, program control problem, a forecasts set.

The work is supported by Russian Fund of Basic Researches (project № 12-01-00024-a).

References

1. *Babenko V. A., Shorikov A. F.* (2012). Optimizatsiya programmnogo upravleniya innovatsionnymi tekhnologiyami na predpriyatiyakh APK [Optimization of program control by innovative technologies at the enterprises of agrarian and industrial complexes]. Sovremennyye problemy ekonomiki, menedzhmenta i marketinga. Materialy XVIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakt. konf. [Modern problems of economy, management and marketing. Materials of XVIII International scientific conference]. Nizhny Tagil, Nizhny Tagil Institute, Urak Federal University, 52-54.

2. *Babenko V. A.*, *Shorikov A. F.* (2011). Ekonomiko-matematicheskaya model i obshchaya skhema optimizatsii upravleniya innovatsionnymi protsessami v usloviyakh riskov [Economic-mathematical model and the general scheme of optimization of management of innovative processes at the risks]. Razrabotka i sozdanie innovatsionnoy infrastruktury Sankt-Peterburgskogo gos. agrarnono universiteta v tselyakh povysheniya kachestva pogotovki spetsialistiov agropromyshlennogo sektora. Materialy mezhdnarodnoy nauch-prakt. konf. [Development and creation of innovative infrastructure of the State Agrarian University to improve the quality of training of specialists of agro-industrial sector. Materials of the international research and training conference]. St. Peresburg, St.-Petersburg State Agrarian University Publ., 9-13.

3. *Bazara M.*, *Shetty K.* (1982). Nelineynoye programmirovanie. Teoriya i algoritmy [Nonlinear programming. Theory and algorithms]. Moscow, Mir.

4. *Krasovsky N. N.* (1968). Teoriya upravleniya dvizheniem [Theory of movement control]. Moscow, Nauka.

5. *Krasovsky N. N.*, *Subbotin A. I.* (1974). Pozitsionnyye differentsialnyye igry [Position differential games]. Moscow, Nauka.

6. *Lotov A. V.* (1984). Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [Introduction into economic-mathematical modeling]. Moscow, Nauka.

7. *Propoy A. I.* (1973). Elementy teorii optimalnykh duskretnykh protsessov [Elements of the theory of the optimum discrete processes]. Moscow, Nauka.

8. *Ter-Krikorov A. M.* (1977). Optimalnoye upravlenie i matematicheskaya ekonomika [Optimum control and mathematical economy]. Moscow, Nauka.

9. *Shorikov A. F.* (2005). Algoritm resheniya zadachi optimalnogo terminalnogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Algorithm of the solution of a problem of optimum terminal control in linear discrete dynamic systems]. Informatsionnyye tekhnologii v ekonomike: teoriya, modeli i metody: sb. nauch. tr. [Information technologies in economy: theory, models and methods: collection of scientific works]. Yekaterinburg, Ural State Economic University Publ., 119-138.

10. *Shorikov A. F.* (1997). Minimaksnoye otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Minimax estimation and management in discrete dynamic systems]. Yekaterinburg, Ural State University Publ.

Information about the authors

Shorikov Andrey Fedorovich (Yekaterinburg, Russia) — Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Applied Mathematics, Ural Federal University (19 Mira str., Yekaterinburg, 620002, Russia, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Babenko Vitalina Alekseevna (Kharkov, Ukraine) — PhD in Technical Science, Associate Professor, the Doctoral Candidate of the Department of Economic Cybernetics, V.V. Dokuchaev Kharkov National Agrarian University (Kommunist–1, Kharkov District, Kharkov Region, 62483, Ukraine, e-mail: vitalina_babenko@meta.ua).