

Для цитирования: Экономика региона. — 2016. — Т. 12, вып. 3. — С. 966–976  
doi 10.17059/2016-3-29  
УДК 338.27

С. Г. Светульников

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(Санкт-Петербург, Российская Федерация; e-mail: ssvetunkov@hse.ru)

## О ВОЗМОЖНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО<sup>1</sup>

*Рассматривается возможность динамического анализа и прогнозирования результатов производства с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами. Эта модель расширяет арсенал инструментальных методов экономиста и позволяет выполнять многовариантные прогнозы производства, недостижимые другими методами из области действительных переменных, поскольку функции комплексных переменных иначе моделируют производство, нежели модели действительных переменных. Отличительной особенностью рассматриваемой модели является возможность вычисления значений коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных на каждом статистическом наблюдении. Это позволяет рассматривать изменение коэффициентов функции во времени, анализировать эту динамику и прогнозировать значения коэффициентов на заданную перспективу, прогнозируя тем самым и вид производственной функции, с помощью которой прогнозируются производственные результаты. Таким образом, вводится в научный оборот модель производственной функции с изменяющимися коэффициентами. С помощью этой модели возможно решение обратной задачи прогнозирования — определение необходимых величин труда и капитала для достижения требуемых производственных результатов. В основе исследования лежат положения современной методологии комплекснозначной экономики, одним из его разделов являются комплекснозначные модели производственных функций. Возможность экономического прогнозирования в статье проверяется на примере экономики Великобритании. Результаты этого прогнозирования сравнивались с прогнозами, полученными другими методами, что позволило сделать вывод об эффективности использования предлагаемого подхода и метода прогнозирования на макроуровне производственных систем. Комплекснозначная степенная модель производственной функции рекомендуется для многовариантного прогнозирования устойчивых производственных систем — глобальной экономики, экономики отдельных стран, крупных отраслей и регионов.*

**Ключевые слова:** экономико-математическое моделирование, производственные функции, комплекснозначная экономика, комплексные переменные, экономическое прогнозирование, эконометрика, метод экспоненциального сглаживания, экономическая динамика, анализ данных, обратная функция

### Введение

Сложность прогнозирования динамики экономических процессов и объектов предопределяет многообразие методов и моделей социально-экономического прогнозирования. В подавляющем большинстве случаев для этого используются методы и модели, описывающие поведение ряда показателей, при этом не вскрываются причинные связи ([1–3] и др.). В самом простом случае используются тренды, исходя из простого принципа — предполагается, что в силу инерции, присущей экономическим системам, сложившиеся тенденции будут продолжаться и в прогнозируемом буду-

щем. На таком же простом принципе построены и модели авторегрессии, скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Но на практике чаще всего это предположение не выполняется, а потому точность прогнозов, выполняемых с помощью таких моделей не особенно высока. При этом следует отметить, что это — наиболее популярные модели прогнозирования, широко используемые и в экономической практике и в прогностической науке. Для повышения точности прогнозирования с помощью этих моделей разрабатываются их различные модификации, например, модели экспоненциального сглаживания в комплекснозначной форме.

В попытках получения более точных экономических прогнозов ученые обращаются к

<sup>1</sup> © Светульников С. Г. Текст. 2016.

задаче построения таких моделей, в которых прогнозируемый показатель рассчитывается в зависимости от значений некоторых влияющих факторов [2], используя аппарат регрессионного анализа [4]. Такие модели строятся из более адекватных предпосылок, ведь только выявляя и описывая причинно-следственные связи сложного объекта можно понять и особенности его поведения, и более точно его спрогнозировать. Но применительно к экономике и этот подход работает не всегда хорошо — любой прогнозируемый показатель отражает экономическое явление, являющееся результатом действия и взаимодействия множества факторов самой разной природы. При этом влияние таких факторов носит сложный, чаще всего нелинейный характер, да еще и с задержкой во времени. И к тому же часть этих факторов оказывается неизвестной прогнози-сту и он не может включить ее в модель. В результате прогнозист вынужден ограничивать круг включаемых в прогнозную модель факторов только основными из них, что не может не привести к ухудшению точности прогнозов.

Следовало бы ожидать еще большей точности от моделей, задачей которых является описание структуры прогнозируемой экономической системы и моделирование взаимосвязей между ее элементами. Это стало возможным после появления на свет моделей межотраслевого баланса, которые до сих пор активно используют при решении различных экономических задач, в том числе и задач экономического прогнозирования [5, 6]. Перспективным направлением в этой области является использование методов адаптации этих моделей, например, методами стохастической аппроксимации. Это же относится и к другому направлению — моделям экономической динамики, бурный рост которых стал возможен после появления работы Р. Солоу, открывшей экономистам саму возможность построения таких моделей [7]. Адаптивные модели экономической динамики также являются предметом современных исследований прогнозистов.

Таким образом, задача повышения точности экономических прогнозов за счет развития теоретической и инструментальной базы теории прогнозистики, остается актуальной.

Одним из перспективных направлений в этой области является применение к задаче экономического прогнозирования методов и моделей комплекснозначной экономики. Интерес к возможности построения регрессионных комплекснозначных моделей по имеющимся статистическим наблюдениям за из-

менением комплексной переменной возник еще в 50–60-х гг. XX в. [8–10], но дальнейшего применения это направление не получило, хотя попытки улучшить аппарат математической статистики комплексных переменных делались и в последующем, вплоть до последних лет [11]. На наш взгляд, главной проблемой в этом направлении было априорно высказываемое предположение о вещественном характере дисперсии комплексной переменной. Преодоление этого препятствия и позволило сформировать основы комплекснозначной экономики [12].

Особый интерес в комплекснозначном прогнозировании представляют модели производственных функций комплексных переменных. Производственные функции действительных переменных, описывая влияние основных производственных ресурсов на производственный результат, позволяют экономисту решать многочисленные практические задачи, в том числе и задачи экономического прогнозирования [13, 14]. Комплекснозначные модели производственной функции иначе описывают протекающие производственные процессы, расширяя тем самым инструментальную базу экономико-математического моделирования. А поскольку экономическая действительность весьма разнообразна, то расширение аппарата ее моделирования за счет включения в него моделей комплексных переменных позволяет описать такие процессы и взаимосвязи, которые модели действительных переменных не описывают. Поэтому от использования моделей производственных функций комплексных переменных в части экономического прогнозирования следует ожидать интересных результатов.

## Методы

Производственная функция комплексных переменных описывает взаимосвязь таких показателей результатов деятельности предприятия как прибыль ( $G$ ) и издержки ( $C$ ), с основными производственными ресурсами, такими как труд ( $L$ ) и капитал ( $K$ ) [12].

В комплекснозначной экономике производственная функция в общем виде представляет собой некоторую зависимость комплексной переменной результата производственной деятельности  $C_t + iG_t$  от комплексной переменной фактора  $L_t + iK_t$ :

$$C_t + iG_t = f(L_t + iK_t). \quad (1)$$

Важным преимуществом такой модели по сравнению с моделями действительных пере-

менных является то, что моделируется зависимость сразу двух экономических переменных от двух других переменных. Ведь модели производственных функций действительных переменных описывают зависимость одной переменной производственного результата  $Q_t$  от нескольких ресурсов, а модели комплексных переменных описывают зависимость двух показателей производственного результата  $C_t$  и  $G_t$  от тех же самых ресурсов. А с учетом того, что  $Q_t = C_t + G_t$ , модель (1) описывает зависимость трех производственных результатов от производственных ресурсов.

Зависимости (1) могут иметь самый различный вид — от простых линейных моделей до многофакторных степенных. Но даже простые линейные комплекснозначные производственные функции дают экономисту при их использовании на практике больше результатов, чем это получается с использованием моделей действительных переменных [15].

В данной статье рассмотрим одну из самых простых форм нелинейных комплекснозначных моделей производственных функций — степенную производственную функцию комплексных переменных с действительными коэффициентами [12]:

$$C_t + iG_t = a(L_t + iK_t)^b. \quad (2)$$

Если представить эту модель в экспоненциальной форме, то наглядно видны ее свойства, делающие ее пригодной для решения многочисленных практических задач экономики:

$$\sqrt[1/2]{1/2}^{1/2} i \arctg \frac{G_t}{C_t} = \left( \sqrt{\frac{2}{t} + \frac{2}{t}} i \arctg \frac{K_t}{L_t} \right)^b. \quad (3)$$

Легко заметить, что полярный угол комплексного производственного ресурса характеризует такой важный экономический показатель, как капиталовооруженность труда ( $K_t/L_t$ ), а полярный угол производственного результата отражает величину другого важного экономического показателя — рентабельности ( $G_t/C_t$ ). Тогда понятно, что при положительных значениях коэффициентов пропорциональности  $a$  и показателя степени  $b$  моделируются такие производственные процессы.

Рост капитала при постоянстве труда (рост капиталовооруженности) приводит к увеличению полярного угла комплексного ресурса, что означает в модели пропорциональное увеличение полярного угла комплексного результата, то есть — рост рентабельности за счет роста валовой прибыли в большей степени, чем издержек. Так обычно и происходит на практике, когда инвестиции в основной капитал

повышают производительность труда, уменьшают производственные потери и приводят к повышению прибыли.

Если же при постоянной величине капитала увеличивать затраты труда, то здесь имеем аналогичную зависимость, но уже с издержками производства. Полярный угол производственных ресурсов в таком случае уменьшается, что моделирует пропорциональное уменьшение полярного угла комплексной переменной производственного результата, а это означает рост издержек в большей степени, чем прибыли. И это также является свойством реально работающих производственных систем.

Это означает, что предложенная модель производственной функции (2) хорошо отражает производственные процессы, а ее характеристики имеют ясный экономический смысл.

Но помимо этого замечательного свойства степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами, она обладает еще одним уникальным свойством — ее коэффициенты легко вычисляются на каждом наблюдении, что открывает перед исследователем новые возможности для экономического анализа и прогнозирования.

Действительно, из экспоненциальной формы записи модели (3) со всей очевидностью следует, что показатель степени  $b$  может быть легко найден по формуле:

$$b_t = \frac{\arctg \frac{G_t}{C_t}}{\arctg \frac{K_t}{L_t}} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

В теории функций комплексного переменного имеют дело с «главными» значениями периодических функций, когда  $k=0$ . Следуя этому правилу, второе слагаемое в правой части следует приравнять нулю.

Сразу же необходимо обратить внимание на то, что показатель степени имеет ясный экономический смысл — поскольку в числителе правой части равенства находится угол, отражающий величину рентабельности ( $G_t/C_t$ ), а в знаменателе этой дроби — полярный угол, отражающий величину капиталовооруженности труда ( $K_t/L_t$ ), показатель степени отражает влияние капиталовооруженности труда на рентабельность производства.

Теперь, зная величину показателя степени на данном наблюдении, можно вычислить на этом же наблюдении и коэффициент пропорциональности  $a$ :

$$a_t = \frac{\sqrt{C_t^2 + G_t^2}}{(\sqrt{L_t^2 + K_t^2})^b}. \quad (5)$$

Поскольку оба эти коэффициента меняются во времени, они представляют собой некие динамические ряды  $\{a_t\}$  и  $\{b_t\}$ , которые и могут быть предметом статистической обработки и прогнозирования.

При этом, конечно, следует обратить внимание на размерность переменных, поскольку производственные функции комплексных переменных являются неоднородными функциями. Действительно, если, например, взять степенную производственную функцию вещественных переменных

$$Q_t = aK_t^\alpha L_t^\beta, \quad (6)$$

и увеличить в ней масштаб капитальных ресурсов в  $\lambda$  раз, то получим:

$$Q_t \stackrel{1}{\neq} \lambda^{\alpha} Q_t = \lambda^{\alpha} a K_t^\alpha L_t^\beta. \quad (7)$$

То есть, в результате изменения масштаба переменной изменится только коэффициент пропорциональности — корректировать другие переменные и коэффициенты нет необходимости.

Другое дело — комплекснозначные функции. Вне зависимости от вида функций использование комплексных переменных придает им свойства неоднородности. Например, изменение масштаба переменной капитального ресурса в те же  $\lambda$  раз приводит к существенному изменению самой комплексной переменной, в чем легко убедиться:

$$L_{tt} + i\lambda K = \sqrt{L_t^2 + (\lambda K_t)^2} e^{i \arctg \frac{\lambda K_t}{L_t}}. \quad (8)$$

Это значит, что комплексная переменная не является однородной и что с изменением масштаба одной из переменных модель существенно изменяет все свои коэффициенты и точность описания исходных переменных.

Рассмотрим эту особенность применительно к степенной производственной функции с действительными коэффициентами (2). Для этого представим модель в виде системы двух уравнений действительных переменных — отдельное уравнение для вещественной части функции и отдельное уравнение для мнимой части функции:

$$\begin{cases} C_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^2})^b \cos(b \arctg \frac{K_t}{L_t}), \\ G_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^2})^b \sin(b \arctg \frac{K_t}{L_t}). \end{cases} \quad (9)$$

Из полученной системы видно, что, например, издержки в этой модели производственной функции описываются так:

$$C_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^2})^b \cos(b \arctg \frac{K_t}{L_t}). \quad (10)$$

Поэтому если изменить масштаб капитального ресурса в  $\lambda$  раз, то для валовой прибыли это будет означать следующее нелинейное изменение:

$$C_t = a(\sqrt{L_t^2 + \lambda^2 K_t^2})^b \cos(b \arctg \frac{\lambda K_t}{L_t}). \quad (11)$$

Это значит, что любая корректировка переменной  $K_t$  вызывает неминуемое изменение и коэффициента пропорциональности  $a$ , и показателя степени  $b$  и точность описания валовой прибыли, значения которой в практических случаях всегда «загрязнено» случайными ошибками, что существенно повлияет на точность аппроксимации.

Очевидно, что функция неоднородна и относительно второго производственного ресурса — труда  $L_t$ .

В каких же единицах измерения следует использовать исходные переменные для построения производственной функции (2)? Для получения ответа на этот вопрос воспользуемся экономическим смыслом используемых переменных.

Как легко заметить, производственный результат состоит из двух составляющих — валовой прибыли  $G_t$  и валовых издержек производства  $C_t$ , относящихся соответственно к действительной и мнимой частям комплексной переменной. Но также легко заметить, что если сложить эти действительную и мнимую части, то получится валовая выручка:

$$Q_t = G_t + C_t. \quad (12)$$

Это означает, что вычисляя комплексную переменную производственного результата во всех производственных функциях комплексных переменных (1), мы всегда получаем не только расчетные значения валовой прибыли и издержек, но и величину валовой выручки  $Q$ .

Довольно часто встречаются ситуации, когда переменные измеряются в разных единицах измерения, или же по соображениям коммерческой тайны можно получить для исследования только безразмерные величины, возникает необходимость приведения всех переменных к одной единице измерения и одному масштабу.

Если, как это принято в экономике, привести исходные данные производственного ре-

зультата к безразмерным величинам, разделив каждую переменную временного статистического ряда на ее первое значение — валовую прибыль  $G_t$  для каждого  $t$  поделить на начальное значение прибыли в первый год наблюдения  $G_1$ , издержки производства  $C_t$  поделить на значение первого года наблюдения  $C_1$ , то будет получен результат, экономическая интерпретация которого затруднена. Действительно, сумма этих безразмерных величин не даст нам безразмерное значение валового выпуска:

$$\frac{G_t}{G_1} + \frac{C_t}{C_1} = \frac{G_t C_1 + C_t G_1}{G_1 C_1} \neq Q_t = \frac{G_t + C_t}{G_1 + C_1}. \quad (13)$$

Поэтому для того чтобы модель имела экономический смысл, необходимо валовую прибыль и себестоимость привести к безразмерным величинам относительно валовой выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1}. \quad (14)$$

Тогда их сумма имеет смысл валовой выручки, отнесенной к первому значению выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1} + \frac{C_t}{Q_1} = \frac{G_t + C_t}{Q_1} = \frac{Q_t}{Q_1}. \quad (15)$$

Приведя к безразмерным величинам переменные комплексного производственного результата, следует привести к безразмерным величинам и переменные комплексного производственного ресурса. Если капитал измеряется в денежных единицах, а труд — в затратах времени или количестве привлеченных людей, необходимо привести значения ресурсов к единому типу измерения и единому масштабу, поскольку выполнять математические действия с числами, измеряемыми в рублях (капитал), и числами, измеряемыми в часах затраченного на работу времени (труд), невозможно. Поэтому рекомендуется значения используемых капитальных ресурсов  $K_t$  для каждого  $t$  поделить на начальное значение капитала в первый год наблюдения  $K_1$ , а затраты труда  $L_t$  поделить на их значение для первого года наблюдения  $L_1$ :

$$\frac{K_t}{K_1}, \frac{L_t}{L_1}. \quad (16)$$

Таким образом, для практического использования степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами (2) необходимо либо использовать данные, измеренные в одних и тех же денежных единицах, либо же приводить их к безразмерным величинам (14) и (16).

С помощью модели (2) с изменяющимися коэффициентами (4) и (5) можно решать многообразные задачи прогнозирования, например, определить, какими будут производственные результаты, если, например, увеличить инвестиции в основной капитал, оставляя неизменными затраты труда, или же наоборот — увеличить число занятых в производстве при одном и том же капитале и др. Поскольку в ней коэффициенты модели изменяются во времени, отражая эволюционный процесс развития, то можно, задавая разную динамику производственных ресурсов, получать различные варианты прогнозов развития производственной системы. Поскольку изменяющиеся коэффициенты модели производственной функции отражают процесс эволюции производства (за счет инновационных процессов, в первую очередь), динамика экономического развития будет прогнозироваться во времени даже в том случае, если предположить, что производственные ресурсы не меняются и остаются постоянными.

Интересной для экономического анализа и прогнозирования является и возможность решения обратной задачи с помощью построения обратных производственных функций [16]. Для модели (2) это означает, что с ее помощью можно решить задачу, обратную данной, а именно — определить потребные размеры основных производственных ресурсов для достижения поставленных производственных целей. Обратная (2) функция будет иметь такой вид:

$$L_t + iK_t = \left( \frac{C_t + iG_t}{a} \right)^{1/b}. \quad (17)$$

Как видно из этой формулы, зная коэффициенты данной модели (4) и (5), можно прогнозировать те затраты труда  $L$  и капитала  $K$ , которые нужны для того или иного сочетания производственных результатов — затрат на производство  $C$  и валовой прибыли  $G$ . А поскольку их сумма дает величину валового выпуска, можно решать и другую задачу — какие нужны производственные ресурсы для достижения заданного объема выпуска.

Задача экономического прогнозирования с помощью модели степенной производственной функции комплексных переменных имеет интересное решение на макро- и мезоуровне. Здесь, конечно, никто не говорит о прибыли или издержках производства. Но при этом легко найти показатели, аналогичные этим показателям производственных функций комплексных переменных. Аналогом показателя валовой прибыли на уровне государ-

ства выступает чистый национальный продукт  $G_t$ , а аналогом издержек производства — национальный промежуточный продукт  $C_t$ . Эта аналогия подтверждается еще и тем, что, как и в (12), для предприятия их сумма —  $(G_t + C_t)$  дает в результате валовой внутренний продукт  $Q_t$  страны. Поэтому производственный результат на макроуровне полностью соответствует всем характеристикам и особенностям производственного результата на уровне предприятия. Основные производственные ресурсы страны также соответствуют экономическому смыслу факторов производственной функции — стоимость основного капитала  $K_t$  и количество занятых в экономике страны  $L_t$  имеют тот же смысл, что и на уровне промышленного предприятия. А поскольку аналогом валового выпуска  $Q$  на макроуровне выступает ВВП страны, а на мезоуровне — ВРП, то актуальность использования модели (2) усиливается, ведь эти два показателя являются основными для характеристики уровня развития страны или региона. И с помощью модели обратной функции (17) можно, например, получить ответ на вопрос, какими должны быть производственные ресурсы страны для «удвоения ВВП».

### Результаты

Рассмотрим теперь возможность использования степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами (2) для экономического прогнозирования. Будем при этом исходить из гипотезы «чем менее инерционным является моделируемый объект, тем менее точными будут прогнозы его экономического развития». Эту гипотезу проверим на примере ретропрогноза экономики Великобритании. Выбор этого объекта обусловлен высокой достоверностью имеющихся статистических данных, поскольку в Великобритании действует многолетняя неизменная методика вычисления данных, не подвергаемая пересмотрам. Данные же Госкомстата РФ о развитии экономики России для целей исследования использовать сложно — время от времени в этом ведомстве происходит изменение методик расчета некоторых показателей, которые в результате этого становятся несопоставимыми друг с другом в динамике. Особенно это касается такого важного показателя, как капитал — величина основных производственных фондов пересчитывается таким образом, что их стоимость в конце данного года по сравнению с их стоимостью предшествующего года не объясняется инвестициями в основной капитал и выбытием фондов.

Таблица 1  
Данные о динамике стоимости основных фондов промышленности Псковской области

Год	Полная стоимость основных фондов, млн руб.	Остаточная стоимость основных фондов в предыдущем периоде, млн руб.	Инвестиции в основной капитал в отчетном периоде, млн руб.
2001	90537	49234	2791
2002	111128	52604	3135
2003	122694	60463	5613,6
2004	129423	67313	5904,9
2005	144880	69984	5546,9
2006	164095	73973	7603,3
2007	188943	81641	11831,2

Это наглядно видно из данных по Псковской области, приведенных в таблице 1. Если, например, к величине остаточной стоимости фондов промышленности Псковской области в 2005 г. (в млн руб., третий столбец строки 2006 г.) прибавить величину инвестиций в основной капитал в 2006 г., то будет получено такое число:

$$73\,973 + 7\,603,3 = 81\,576,3$$

Но для 2006 г. Госкомстат выдает другую величину, а именно — 164095 млн руб., число в два раза большее, чем следует из вычислений. А если учесть, что мы при этом даже не учли факта износа и выбытия основных фондов, то доверие к данным о полной стоимости основных фондов становится еще меньше.

Но поскольку нашей задачей является демонстрация возможностей нового метода прогнозирования, воспользуемся данными Великобритании. При этом получаемые прогнозы будем верифицировать другими методами прогнозирования.

В таблице 2 приведены исходные данные по экономике Великобритании в период с 1990 г. по 2010 г.<sup>1</sup> (в относительных величинах) и результаты расчета коэффициентов модели (2) по этим данным.

Рассмотрим динамику вычисленных коэффициентов.

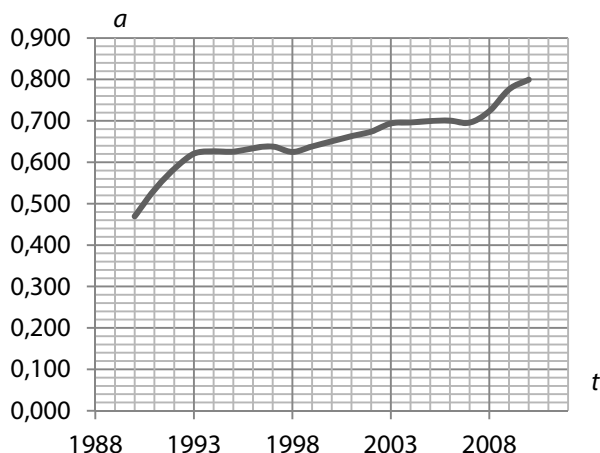
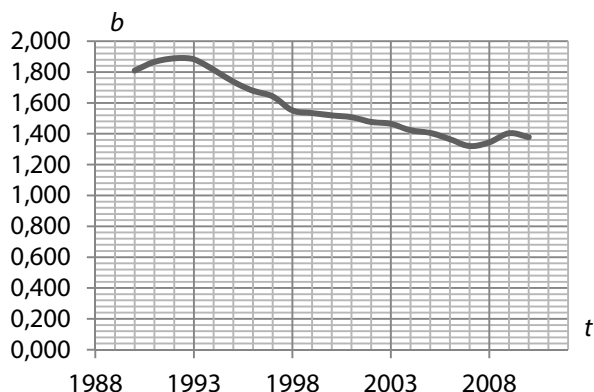
Как видно на рисунке — коэффициент пропорциональности степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами меняется во времени почти линейно. Исключением является начальный период наблюдения и перелом тенденции в кризисном 2008 г. Поскольку в данной статье рассма-

<sup>1</sup> Office for National Statistics. [Electronic resource]. URL: <http://www.ons.gov.uk/ons/index.html> (date of access 11.11.2015)

Таблица 2

## Исходные данные об экономике Великобритании и коэффициенты производственной функции

Годы, $t$	$G_t/Q_t$	$C_t/Q_t$	$K_t/K_1$	$L_t/L_1$	$b_t$	$a_t$
1990	0,869	0,131	1,000	1,000	1,810	0,469
1991	0,909	0,141	0,921	0,971	1,866	0,534
1992	0,947	0,144	0,888	0,949	1,888	0,584
1993	0,999	0,148	0,889	0,942	1,883	0,621
1994	1,063	0,152	0,954	0,950	1,814	0,626
1995	1,130	0,156	1,037	0,959	1,738	0,626
1996	1,207	0,164	1,114	0,968	1,679	0,634
1997	1,289	0,167	1,186	0,985	1,643	0,638
1998	1,368	0,174	1,336	0,994	1,552	0,625
1999	1,444	0,185	1,383	1,008	1,534	0,638
2000	1,517	0,195	1,428	1,021	1,519	0,651
2001	1,588	0,203	1,468	1,033	1,507	0,663
2002	1,672	0,214	1,543	1,040	1,477	0,674
2003	1,778	0,220	1,596	1,051	1,465	0,694
2004	1,872	0,237	1,713	1,062	1,423	0,696
2005	1,957	0,242	1,792	1,076	1,406	0,699
2006	2,071	0,258	1,941	1,088	1,365	0,701
2007	2,195	0,271	2,137	1,096	1,320	0,696
2008	2,249	0,265	2,062	1,099	1,344	0,723
2009	2,164	0,280	1,788	1,080	1,404	0,776
2010	2,279	0,288	1,865	1,073	1,378	0,799

Рис. 1. Динамика коэффициента пропорциональности  $a$  производственной функции (2) ВеликобританииРис. 2. Динамика показателя степени  $b$  производственной функции (2) Великобритании

тривается возможность использования производственной функции для прогнозирования, то динамика коэффициента пропорциональности для производственной функции Великобритании может быть легко аппроксимирована и спрогнозирована с помощью линейного тренда с учетом тенденций последних лет. Сделать это можно, адаптировав модель линейного тренда методом неравномерного сглаживания.

Тогда, используя МНК и адаптируя полученную модель методом неравномерного сглаживания, для динамики коэффициента пропорциональности получим следующий тренд:

$$\hat{a}_t = 0,014t - 27,312, \quad (18)$$

где  $t$  — текущий год.

Изменение показателя степени  $b$  имеет убывающий характер, что видно на графике (рис. 2).

И в этом случае следует использовать модель линейного тренда с адаптацией его методом неравномерного сглаживания. Адаптированная модель тренда имеет вид:

$$b = 51,582 - 0,025t. \quad (19)$$

Будем выполнять точечные прогнозы, поскольку нашей задачей является демонстрация уникальных возможностей рассматриваемой производственной функции, а не выполнение конкретных прогнозов. С учетом полученных уравнений трендов (18) и (19) получим для Великобритании прогнозную модель производства на ближайшую перспективу:

$$\hat{C}_t + i\hat{G}_t = (0,014t - 27,312) \times (L_t + iK_t)^{(51,582 - 0,025t)}. \quad (20)$$

Полученную модель (20) можно использовать для многовариантных прогнозных расчетов показателей экономики Великобритании. Можно, например, решить прямую задачу — по планируемым значениям затрат капитала и труда в 2011 г. с помощью (20) спрогнозировать чистый и промежуточные продукты Великобритании, а на их основе — валовой внутренний продукт. А можно решить и обратную задачу — по желательным для экономики страны значениям чистого и промежуточного продукта определить, какие именно производственные ресурсы нужны для достижения такого результата.

Рассмотрим вначале прямую задачу. В нашем распоряжении имеются фактические данные по основному капиталу Великобритании и количеству занятых в экономике этой страны

Таблица 3

## Прогноз развития экономики Великобритании

Показатель	Факт	Прогноз моделью (23)	Ошибка прогноза, %	Прогноз методом экспоненциального сглаживания (оптимальное $\alpha$ )	Ошибка прогноза, %
Чистый продукт, $G_t/Q_1$	2,395	2,329	2,74	2,457 ( $\alpha = 1,95$ )	2,58
Промежуточный продукт, $C_t/Q_1$	0,299	0,298	0,01	0,287 ( $\alpha = 1,44$ )	15,67
Валовой внутренний продукт, $Q_t/Q_1$	2,694	2,627	1,85	2,743 ( $\alpha = 1,98$ )	3,75

за 2011 г.<sup>1</sup> В безразмерных относительных величинах, используемых в таблице 2, они составляют для капитала  $K/K_1 = 1,84111$  (что составляет 98,73 % от значения показателя 2010 г.) и для числа занятых  $L/L_1 = 1,07828$  (что составляет 100,54 % от значения показателя 2010 г.).

С помощью модели (20) были получены прогнозы чистого и промежуточного продукта, а также ВВП Великобритании на этот год. Верификацию прогноза проведем с помощью модели экспоненциального сглаживания, отдавая себе отчет в том, что при такой динамике оптимальные значения постоянной сглаживания будут находиться в запредельном множестве ( $1 \leq \alpha < 2$ ). Результаты расчетов и фактические данные сведены в таблице 3.

Данные таблицы 3 показывают, что прогноз по модели комплекснозначной производственной функции очень близок к реальным значениям — по чистому продукту ошибка оказалась менее 3 %, по валовому внутреннему продукту — менее 2 %, а промежуточный продукт спрогнозирован почти точно. Модель экспоненциального сглаживания точнее спрогнозировала размер чистого продукта, но хуже — остальные показатели. Особенно плохо она спрогнозировала промежуточный продукт, в то время как комплекснозначная степенная производственная функция с действительными коэффициентами дает почти абсолютную точность прогноза. Процедура ретропрогноза показала возможность использования на практике предлагаемого метода прогнозирования. С помощью модели (20) можно решать и другие задачи, например, определить, какими будут экономические показатели экономики государства, если увеличить инвестиции в основной капитал или же увеличить число занятых и т. п.

Рассмотрим теперь обратную задачу, ведь особенностью моделей комплексных переменных является еще и возможность построения обратных производственных функций (17). Для модели (2) это означает, что возможно

решить другую задачу (обратную данной), а именно — определить потребные размеры основных производственных ресурсов для достижения поставленных производственных целей. Обратная к (2) функция (17) будет иметь такой вид:

$$\hat{L}_t + i\hat{K}_t = \left( \frac{C_t + iG_t}{0,014t - 27,312} \right)^{\frac{1}{51,582 - 0,025t}}. \quad (21)$$

С ее помощью можно решать различные задачи, например, получить ответ на вопрос, как должны измениться производственные ресурсы в 2015 г., если в экономике страны желательно оставить промежуточный продукт на прежнем уровне, а чистый продукт увеличить на 20 %.

В терминах рассматриваемой задачи это означает следующее: промежуточный продукт в 2015 г. ( $C/Q_1$ ) остается равным 0,288, а чистый продукт ( $G/Q_1$ ) увеличивается по сравнению с 2010 г. на 20 %, то есть  $G/Q_1 = 2,279 \times 1,20 = 2,735$ .

К 2015 г. коэффициент пропорциональности прогнозируется на уровне  $a = 0,898$ , а показатель степени —  $b = 1,207$ . Подставляя эти числа в модель (21), получим прогнозируемые при данном уровне экономического и технологического развития Великобритании производственные ресурсы:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{2015} + i\hat{K}_{2015} &= \left( \frac{0,288 + i2,735}{0,898} \right)^{\frac{1}{1,207}} = \\ &= 0,321 + i3,046. \end{aligned} \quad (22)$$

Это означает, что для решения поставленной задачи необходимо капитальные ресурсы по сравнению с 2015 г. увеличить в  $3,046/1,865 = 1,63$  раза, а число занятых в производстве сократить в  $1,073/0,321 = 5,3$  раза. Из полученных расчетных значений со всей очевидностью вытекает невозможность достижения поставленных значений чистого и промежуточного продукта страны.

Следует обратить внимание на то, что в данном исследовании не ставилась задача получения каких-либо экономических прогнозов и их обсуждение. В статье рассматривается новая модель производственной функции комплекс-

<sup>1</sup> Office for National Statistics. URL: <http://www.ons.gov.uk/ons/index.html> (дата обращения 11.11.2015).



ных переменных и новый метод ее использования для задач экономического прогнозирования. При необходимости выполнения тщательных экономических прогнозов следовало бы использовать для прогнозирования динамики коэффициентов комплекснозначной производственной функции более сложные методы и модели прогнозирования.

### Обсуждение

На основании приведенных результатов можно сделать несколько выводов.

1. Прежде всего, следует отметить, что степенная производственная функция комплексных переменных обладает рядом уникальных свойств.

Первое из них: по значениям производственных ресурсов можно судить о величинах сразу трех производственных результатов — издержек производства  $C$ , валовой прибыли  $G$  и валовом выпуске  $Q$ . На макро- и мезоуровне это — промежуточный, конечный и валовой продукты.

Второе: значения действительных коэффициентов этой модели могут быть вычислены как на каждом наблюдении, так и на множестве наблюдений. Но первая возможность — возможность вычисления коэффициентов на каждом наблюдении позволяет, проанализировав динамику коэффициентов и спрогнозировав их, получить модель производственной функции с изменяющимися коэффициентами. Эту модель можно использовать для многовариантных прогнозов экономического развития.

Третьим важнейшим отличительным свойством степенной производственной функции комплексных переменных от моделей действительных переменных является возможность решения обратной задачи — определения объема необходимых производственных ресурсов для достижения поставленных производственных задач.

2. Рассмотренная в статье модель производственной функции является базовой для дальнейших исследований. Повышение точности моделирования и прогнозирования производ-

ства следует ожидать расширением самой модели производственных функций за счет включения в нее новых переменных. Сделать это можно, исходя из свойств многих экономических показателей, которые представляют собой агрегированную величину. Например, основные фонды  $K$  представляют собой сумму двух слагаемых — основные производственные фонды  $K_0$  и основные непроизводственные фонды  $K_1$ :

$$K = K_0 + K_1. \quad (23)$$

Поскольку влияние на производственный результат этих двух составляющих различно, это можно учесть, представляя капитал в комплексной форме:

$$\dot{K} = K_0 + iK_1. \quad (24)$$

Аналогично и труд  $L$  также может быть представлен как сумма двух составляющих — производственный  $L_0$  и непроизводственный  $L_1$  персонал:

$$L = L_0 + L_1. \quad (25)$$

Поскольку и в этом случае очевиден разный вклад этих составляющих затрат труда в производственный результат, то учесть этот вклад можно, представив труд в форме комплексной переменной:

$$\dot{L} = L_0 + iL_1. \quad (26)$$

Тогда более подробная модель комплекснозначной производственной функции (1) будет иметь такой вид:

$$C_t + iG_t = f \sqrt[n]{\dot{K}_t^{1/n} \dot{L}_t^{1/n}} K_{0t} + iK_{1t} \quad (27)$$

Очевидно, что состав переменных этой функции может быть существенно расширен за счет включения новых переменных (инвестиции в основной капитал  $I_0$  и инвестиции в персонал  $I_1$  и др.)

3. Модель степенной производственной функции комплексных переменных может рассматриваться как важный инструмент, расширяющий арсенал моделей и методов экономического моделирования и прогнозирования.

### Благодарность

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-06-00316 «Комплекснозначный анализ эффективности развития минерально-сырьевого комплекса России».*

### Список источников

1. Акаев А. А., Кортаев А. В., Малков С. Ю. Комплексный системный анализ, математическое моделирование и прогнозирование развития стран БРИКС. Предварительные результаты. — М.: Красанд, 2014. — 392 с.
2. Затонский А. В., Сиротина Н. А. Прогнозирование экономических систем по модели на основе регрессионного дифференциального уравнения // Экономика и математические методы. — 2014. — № 50 (5). — С. 91–99.

3. Ширяев В. И., Ширяев Е. В. Принятие решений. Прогнозирование в глобальных системах. — М.: Либроком, 2013. — 176 с.
4. Малов С. В. Регрессионный анализ. Теоретические основы и практические рекомендации. — СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2013. — 276 с.
5. Пересада В. П. Управление динамикой развития экономики на базе межотраслевого баланса. — СПб.: Политехника-сервис, 2010. — 170 с.
6. Суворов Н. В., Балашова Е. Е. Применение межотраслевого метода в исследовании факторов динамики выпуска отраслей реального сектора отечественной экономики // Проблемы прогнозирования. — 2011. — № 5. — С. 19–38.
7. Solow R. M. Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. — 1957. — Vol. 39. — No. 3. — pp. 312 — 320.
8. Arens R. Complex processes for envelopes of normal noise // IRE Trans. Inform. Theory. — Sept. 1957. — vol. IT-3. — pp. 204–207.
9. Goodman N. R. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution // Ann. Math. Statist. — 1963. — vol. 34. — pp. 152 — 176.
10. Wooding R. A. The multivariate distribution of complex normal variables // Biometrika. — 1956. — vol. 43. — Pp. 212–215.
11. Tavares G. N., Tavares L. M. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables // IEEE Transactions on Communications. — 2007. — 55(32). — Pp. 1857–1862.
12. Svetunkov S. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. New York: Springer Science+Business Media, 2012. — 318 p.
13. Афанасьев А. А., Пономарева О. С. Производственная функция народного хозяйства России в 1990–2012 гг. // Экономика и математические методы. — 2014. — № 50 (26). — С. 21–33.
14. Клейнер Г. Б. Мезоэкономика развития. — М.: Наука, 2011. — 806 с.
15. Merkulova T. V., Prikhodko F. I. Dynamics of macroeconomic indicators modeling by functions of complex variables // Бизнес-Информ. Бюлетень ВАК України. — 2010 (381). — № 4 (5). — С. 67–71.
16. Светульников И. С. Обратные производственные функции комплексного переменного // Экономическая кибернетика. Системный анализ в экономике и управлении. Сб. науч. тр. Вып. № 15. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. — С. 88–93.

### Информация об авторе

**Светульников Сергей Геннадьевич** — доктор экономических наук, профессор, академический руководитель магистерской программы «Маркетинговые технологии», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Российская Федерация, 194354, г. Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16; e-mail: ssvetunkov@hse.ru).

For citation: *Ekonomika regiona* [Economy of Region]. — 2016. — Vol. 12, Issue 3. — pp. 966–976

**S. G. Svetunkov**

National Research University Higher School of Economics (Saint Petersburg, Russian Federation; e-mail: ssvetunkov@hse.ru)

### The Possibility Using the Power Production Function of Complex Variable for Economic Forecasting

*The possibility of dynamic analysis and forecasting production results using the power production functions of complex variables with real coefficients is considered. This model expands the arsenal of instrumental methods and allows multivariate production forecasts which are unattainable by other methods of real variables as the functions of complex variables simulate the production differently in comparison with the models of real variables. The values of coefficients of the power production functions of complex variables can be calculated for each statistical observation. This allows to consider the change of the coefficients over time, to analyze this trend and predict the values of the coefficients for a given term, thereby to predict the form of the production function, which forecasts the operating results. Thus, the model of the production function with variable coefficients is introduced into the scientific circulation. With this model, the inverse problem of forecasting might be solved, such as the determination of the necessary quantities of labor and capital to achieve the desired operational results. The study is based on the principles of the modern methodology of complex-valued economy, one of its sections is the complex-valued patterns of production functions. In the article, the possibility of economic forecasting is tested on the example of the UK economy. The results of this prediction are compared with the forecasts obtained by other methods, which have led to the conclusion about the effectiveness of the proposed approach and the method of forecasting at the macro levels of production systems. A complex-valued power model of the production function is recommended for the multivariate prediction of sustainable production systems — the global economy, the economies of individual countries, major industries and regions.*

**Keywords:** economic and mathematical modeling, production functions, complex-valued economy, complex-valued variables, economic forecasting, econometrics, exponential smoothing method, economic dynamics, data analysis, inverse function

## Acknowledgements

The article has been supported by the Russian Foundation for Basic Research, the Grant № 13–06–00316 “Complex-valued efficiency analysis of the Russian mineral and raw complex development”.

## References

1. Akaev, A. A., Korotaev, A. V. & Malkov, S. Yu. (2004). *Kompleksnyy sistemnyy analiz, matematicheskoye modelirovaniye i prognozirovaniye razvitiya stran BRIKS. Predvaritelnyye rezultaty [Comprehensive system analysis, mathematical modeling and forecasting of the development of the BRICS countries. Preliminary results]*. Moscow: Krasand Publ., 392.
2. Zatonitskiy, A. V. & Sirotnina, N. A. (2014). Prognozirovaniye ekonomicheskikh sistem po modeli na osnove regressionnogo differentsialnogo uravneniya [The forecasting of economic systems based on the model of the regression differential equation]. *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and mathematical methods]*, 50(5), 91–99.
3. Shiryaev, V. I. & Shiryaev, E. V. (2013). *Prinyatie resheniy. Prognozirovaniye v globalnykh sistemakh [Decision-making. Forecasting in global systems]*. Moscow: Librokom Publ., 176.
4. Malov, S. V. (2013). *Regressionnyy analiz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskie rekomendatsii [Regression analysis. Theoretical bases and practical recommendations]*. St. Petersburg: St. Petersburg University Publ., 276.
5. Peresada, V. P. (2010). *Upravleniye dinamikoym razvitiya ekonomiki na baze mezhotraslevogo balansa [Management of the dynamics of the development of economy based on the cross-industry balance]*. St. Petersburg: Politekhniko-servis Publ., 170.
6. Suvorov, N. V. & Balashova, E. E. (2011). Primeneniye mezhotraslevogo metoda v issledovanii faktorov dinamiki vypuska otrasley realnogo sektora otechestvennoy ekonomiki [The application of a cross-industry method in the research of the factors of the dynamics of the real national sector's industries]. *Problemy prognozirovaniya [Problems of forecasting]*, 5, 19–38.
7. Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320.
8. Arens, R. (1957, September). Complex processes for envelopes of normal noise. *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-3, 204–207.
9. Goodman, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist.*, 34, 152–176.
10. Wooding, R. A. (1956). The multivariate distribution of complex normal variables. *Biometrika*, 43, 212–215.
11. Tavares, G. N. & Tavares, L. M. (2007). On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. *IEEE Transactions on Communications*, 55(32), 1857–1862.
12. Svetunkov, S. (2012). *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. New York: Springer Science+Business Media, 318.
13. Afanasyev, A. A. & Ponomareva, O. S. (2014). Proizvodstvennaya funktsiya narodnogo khozyaystva Rossii v 1990–2012 gg. [Production function of a national economy of Russia in 1990–2012]. *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and mathematical methods]*, 50(26), 21–33.
14. Kleyner, G. B. (2011). *Mezoeconomika razvitiya [Meso-economy of development]*. Moscow: Nauka Publ., 806.
15. Merkulova, T. V. & Prikhodko, F. I. (2010). Dynamics of macroeconomic indicators modeling by functions of complex variables. *Biznes-Inform. Byuleten VAK Ukraini [Business Inform. Bulletin of Higher Attestation Commission of Ukrain]*, 4(5), 67–71.
16. Svetunkov, I. S. (2007). Obratnyye proizvodstvennyye funktsii kompleksnogo peremennogo [Inverse production functions of the complex variable]. *Ekonomicheskaya kibernetika. Sistemnyy analiz v ekonomike i upravlenii. Sb. nauch. tr [Economic cybernetics. The system analysis in economy and management: collection of research papers]*, 15. St. Petersburg: SPbGUEF Publ., 88–93.

## Author

**Sergey Gennadyevich Svetunkov** — Doctor of Economics, Professor, Academic Head of the Master Program of Marketing Technologies, National Research University Higher School of Economics (16, Soyuzo Pechatnikov St., Saint Petersburg, 194354, Russian Federation; e-mail: ssvetunkov@hse.ru).